

- NAGYVÁRAD 2015 -

ORADEA
2015



Szerkesztették:

Zsigó Tamás

Kéry Hajnal

Zalder Éva

Haracsek Klementina

István Zoltán

Kovács Clara

Zsíros Anikó

Pálhegyi Farkas László

dr. Bencze Mihály



Előszó

Az országépítő Szent László Nagyvárada 2013-ban írta be a nevét az Erdélyi Magyar Matematikaversenyek történetébe, éspedig azzal, hogy itt alakult meg és itt zajlott a Szacsvey Imre általános iskolában az Első Erdélyi Magyar Matematikaverseny az 5-8 osztályok számára.

Azon a versenyen diákjaink láthatták, hogy a matematikatanulás mozgatóerejének a felfedezés izgalmának kell lennie, nem pedig annak a kétes értékű célnak, hogy másoknál jobb osztályzatokat kapjunk, vagy valamilyen díj dicsőségében sütkérezzünk. Tanáraink pedig érzékelhették azt, hogy a nevelő feladata olyan választási szabadságot adni a gyerekeknek, hogy bárhogyan is választ, igazán matematikát tanuljon, és azt is, hogy a természet világa nem csupán létező és feltételezett erők pállott kotyvaléka, hanem csodálatosan leleményes, egységes matematikai rendszer. Idővel mindenki azt is megérti, hogy a matematika az emberi elme azon képessége, amelynek célja, hogy kárpótoljon az élet rövidségéért és érzékszerveink tökéletlenségéért. Egy-egy nehezebb feladat megoldásánál érzékelhetjük azt, hogy a végtelen az, ahová eljutnánk, ha nem hagynánk abba a számolást. Ide természetesen soha nem érkezünk el; ebből a szempontból a matematikai végtelen leginkább egy soha be nem tartott ígérethez hasonlít. Végül maradjuk abban, hogy a matematika az, ami életet lehel a dalba, és a dallam nem más, mint a számok harmóniája.

Nagyvárad másodszor is beírta a Kárpát-medence magyar matematikájának történetébe a nevét 2015. április 30-május 3. között, éspedig azzal, hogy a Szent László Római Katolikus Teológiai Líceum szervezte a II. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyt az 5-8 osztályos diákok számára. Itt, Erdély, Kárpátalja, Délvidék, Felvidék és Magyarország majdnem kétszáz diákja találhat magára, és érzékelheti a matematika csodálatos dallamát. A haza a magasban szeretetének mécsesét a rendezők, és a tanáraink hozzák a nagy családuk templomába, hogy láthassuk Szent László kultúra és műveltség teremtmény nagyságát, a fennmaradt épületek és főként a róla elnevezett templom matematikáját.

A szervezők: Kéry Hajnal főtanfelügyelő helyettes, Zsigó Tamás a versenybizottság titkára, Pálhegyi-Farkas László bizottsági tag, István Zoltán matematika tanár, Kovács Klára matematika tanár, Zsíros Anikó matematika tanár, Zalder Éva Mária a szervező iskola igazgatója, Harácsék Klementina igazgató helyettes, és a szervező iskola munkaközössége mindent megtettek annak érdekében, hogy Nagyvárad a jelenlevőknek egy csodálatos élmény maradjon.



E verseny a román tanügy minisztérium hivatalos versenye. Köszönjük, hogy értékeli tanáraink és diákjaink munkáját. Mátyás Éva Emőke a versenybizottság ügyvezető elnöke képviselte a tanügy minisztériumot, Dr. Kovács István Lehel a marosvásárhelyi Sapiientia Egyetem adjunktusa a versenybizottság elnöki szerepét vállalta.

Dr. Bencze Mihály a versenybizottság alelnöke



II. Nemzetközi Magyar Nyelvű Matematika Verseny hivatalos megnyitó beszéde

2015. április 30- csütörtök, 18 óra

Nagyvárad Szigligeti Színház

Nagy tisztelettel és még nagyobb szeretettel köszöntöm Önöket, akik ezen az emlékezetes napon megjelentek azzal a szándékkal, hogy az általános iskolai tanulók számára megrendezett II. Nemzetközi Magyar Nyelvű Matematika Versenyen részt vegyenek.

Bihar megye Tanfelügyelősége és a befogadó iskola, a Szent László Római Katolikus Teológiai Líceum nevében nagy örömmel üdvözlöm a Versenybizottság elnökségét és tagjait, a régióvezetőket, és természetesen a verseny több mint 160 résztvevőjét, azt az V-VIII osztályos kis és nagydiákot, akiknek sikerült kiváló eredményeket felmutatni s ezzel kiérdemelték, hogy itt lehessenek.

Messziről, vagy még annál is messzebből érkeztek: Kárpátaljáról, Délvidékről, Felvidékről, Magyarországról, Erdélyből, Partiumból, a Bánságból, vagy Románia távolabbi vidékeiről, hogy kipróbálják erejüket, megmutassák tehetségüket. Üdvözljük az őket felkészítő tanárkollégákat és kísérő pedagógusokat, akiket nagy szeretettel látunk Szent László és Ady Endre városában, a Pece parti Párizsban.

Mint ahogyan ezt már elmondta az előttem szóló Botházy Daróczi Réka, a Szigligeti Színház Lilliput Társulatának művészeti igazgatója, jelen van ezen a versenyen Dr. Bencze Mihály tanár úr, aki 1991-ben Szegeden, a Rátz László vándorgyűlésen Oláh Györggyel közösen megalapította a Nemzetközi Magyar Matematika Versenyt, melyről mára már köztudott, hogy emblematikus értékű, minden évben megrendezésre kerülő rangos megmérettetés. Nagy megtiszteltetés, hogy Dr. Bencze Mihály közöttünk van, a verseny alelnöki minőségében. Büszkék vagyunk a tanár úr erdélyi származására, még akkor is, ha jelenleg Bukarestben tevékenykedik. Elmondanám róla a továbbiakban azt is, hogy brassói iskolaalapító, hivatalosan bejegyzett tudományos társaságok, kiadványvállalatok alapítója, aktív szervezője a hazai, és a határon túli matematikával kapcsolatos rendezvényeknek; s mint ahogy erről egyik szívemnek igen kedves kolléganőm tájékoztatott, tehetséges költő, aki hiszi és vallja, hogy a matematikai gondolkodás, a nyelvi bravúr és a klasszikus kultúra nagyszerűen kiegészítik egymást, képesek együtt létezni és hatni. Köszönjük tanár úr, hogy itt van velünk.



Deklaráltan elhangzott már többször is, hogy miért is jött létre ez a verseny. Mi az, ami létrehozta, s mi az, ami továbbra is életben tartja; sőt, mint ahogy ez jelen esetben is történik, egyre bővül, egyre több korosztályt és korcsoportot foglal magába. Minden bizonnyal a matematika egyetemes nyelve és világa az, ami első sorban életre hívta, de ugyanolyan bizonyos, hogy az általunk beszélt közös anyanyelv, szép magyar nyelvünk is ugyanilyen erős kapocs. Ezért érezzük nem csak megtisztelőnek, de jelképes értékűnek is, hogy Nagyvárada és iskolánk ad otthont ennek a versenynek, hisz ez a város mindig kultúrák találkozásának fellegvára volt. Az iskolánk jellegét meghatározó *katolikus* szó pedig az egyetemes, a mindent átfogót és mindenkit befogadót jelenti. Ha rövid ideig is, de szívszorítóan nagyszerű érzés hogy ilyen módon lehetünk együtt mindannyian. Ezt az érzést Mécs László katolikus papköltő szavaival tolmácsolnám legtalálóbban:

*Lehetünk szétvágva harminchét határba
s hordhatjuk a mézet a közös kaptárba,
csak a Méhes álljon ragyogón, kitárva
új határok felett minden égi tájra.*

Kedves együtt ünneplő és együtt dolgozó felnőttek, egymással és egymásért versenyző gyerekek, legyen ez a megmérettetés – mint eddig is - régiók találkozója, kultúrák találkozója, emberi kapcsolatok, létező és ezután megszületendő batárságok színhelye, a minőségi szellemi munka Méhese.

A szervező bizottság nevében köszönetet mondunk ez úton a Tanügy Minisztérium Kisebbségi Osztályának és a helyi Tanfelügyelőségnek, Mátyás Emőke szaktanfelügyelő- és Kéry Hajnal főtanfelügyelő helyettes asszonynak valamint Zsigó Tamás szaktanfelügyelőnek. Megköszönjük továbbá Nagyvárada és Bihar megye magyar tananyelvű és magyar tagozatos iskoláinak támogatását. Köszönet illeti testvériskolánkat, a Lorántffy Zsuzsanna Református Gimnáziumot, a Művészeti Iskola magyar tagozatos diákjait, az Ady Endre és a Mihai Eminescu Líceum képviselőit, a paptamási, az értarcsai, az érseki, érseki és micskei általános iskolákat. Köszönet Márton Katalin képzőművész tanárnak a verseny logójának megtervezéséért, Zalder András formatervező munkájáért, Dr. Bántó Norbert támogatásáért és Dr. Lakatos Attila egyháztörténész valamint Jakabffy László tanár úr hozzájárulásáért. Köszönjük a Nagyváradi Polgármesteri Hivatal és Huszár István alpolgármester úrnak, az Europrint Nyomdának és Derzsi Ákos úrnak a segítségét valamint Biró Rozália szenátorasszony nagyvonalú támogatását. Külön köszönet a Szigligeti Színház és az Állami Filharmónia menedzser igazgatóinak, Czvikker Katalinnak és Tódor Albertnek, akik hozzájárulásával nyitó és záró rendezvényeink a versenyhez méltó, városunkat meghatározó helyszíneken történhettek.



S végül, köszönet történelmi egyházaink támogatásáért, akik iskolai oktatásunk állandó támaszai. Rendkívül hálásak vagyunk a Mallersdorfi Ferences Rend által nyújtott tartalmas segítségért.

Ez úton tolmácsolom Exc. Böcskei László megyéspüspök úr meghívását a Szent László zárándoklatra és az ezt követő körmenetre, a Varadinum ünnepségsorozat nyitó rendezvényére, keresztény hitünk és nemzeti identitásunk egyik páratlan ünnepére, egy egészen kivételes együttlétre. Kérem tehát Önöket kedves vendégeink, hogy a vasárnapi díjkiosztó ünnepséget követően, ünnepeljenek Nagyvárad és Biharország magyarságával és más nyelvet beszélő, de békésen együtt élő polgárával.

Számos és számtalan ismert, és magát megnevezni nem akaró jó szándékú ember fogott össze, egy lélekként, hogy Önöket méltó módon fogadhassuk és kifejezzük azt, amit szívünk mélyén mindannyian érzünk: mi összetartozunk, attól függetlenül, hogy melyik országban süt ránk a nap, vagy hol borul be fölöttünk Isten szent ege. Mi egy nyelvet beszélünk: örülünk egymás sikereinek, s aggódunk, ha rossz híreket sodor felénk a határ menti szél. S ha működik a kollektív tudat varázsigéje, ami életben tartott, ez így is marad, írott és nem jegyzett határokon innen és túl. Sok sikert és tartalmas ittlétet. Köszönöm, kitüntetető figyelmüket.

Zalder Éva Mária,

a nagyváradai Szent László Római Katolikus Teológiai Líceum igazgatója



Feladatok



5. (6.) évfolyam

1.feladat

Határozd meg azokat az n nem nulla, egyjegyű természetes számokat, amelyeket, ha megszorunk 38-cal, majd a szorzatot 76-tal, és a kapott eredményekhez hozzáadunk 7-et, olyan számokat kapunk, amelyeknek az utolsó számjegye 9!

Szabó Magda, Szabadka

2. feladat

A 2, 3, 5, 11, 13, 19, 31, 53 és 61 számokat helyezzük el hármas csoportokban úgy, hogy az egyes csoportokban levő számok szorzatai egymás utáni természetes számok legyenek!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

3. feladat

Adott az $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2015} + 2^{2016}$ természetes szám.

a) Igazold, hogy A osztható 30-cal.

b) Határozd meg a p és q prímszámokat tudva azt, hogy:

$$(2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2015} + 2^{2016}) : (1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{2012}) + p \cdot q = 2015.$$

Mátéfi István, Marosvásárhely

4. feladat

Határozd meg azokat az a, b és c tízes számrendszerbeli számjegyeket, amelyekre fennáll a

$$\text{következő egyenlőség: } (\overline{aaaa})^2 + (\overline{bbbb})^2 + (\overline{cccc})^2 = 12221^2.$$

Dr. Bencze Mihály, Bukarest

5. feladat

Hány olyan n jegyű ($n \geq 2$) természetes szám van a tízes számrendszerben, amelynek számjegyei különbözőek, és minden két szomszédos számjegyének összege osztható 3-mal?

Gecse Frigyes, Kisvárd

6. feladat



A sárkány, hogy mentse az életét, megmutatta Jánosnak az aranyrudakat tartalmazóládáját, és azt mondta: „Tegyél a zsákodba legalább egy aranyrudat. Azután én visszateszek a zsákodból a ládámba legalább egy rudat, de más darabszámút, mint ahányat te elvettél. Így fogjuk egymás után rakosgatni a rudakat: te a ládából a zsákodba, én a zsákodból a ládámba, de minden egyes alkalommal az összes korábbi áttevéstől különböző darabszámút. Amikor ennek a szabálynak a betartásával már nem lehet folytatni az áttevést, elviheted, ami éppen akkor lesz a zsákodban.” Legtöbb hány aranyrúddal távozhatott János, ha a ládában eredetileg 10 aranyrúd volt, és a sárkány mindent megtett azért, hogy János a lehető legkevesebb aranyrudat kapjon?

Nagy Baló András, Budapest



6. (7.) évfolyam

1. feladat

Egy 5×5 -ös négyzetrács bal alsó négyzetében ül egy bolha. Ugrania csak jobbra vagy felfelé szabad, de az ugrás hossza bármekkora lehet. Hányféleképpen juthat el a jobb felső négyzetbe?

Horváth Katalin, Komárom

2. feladat

Az iskola udvarán a diákok egy sorban egymás mellett állnak. Minden diáknak vagy piros, vagy fehér, vagy zöld sapka van a fején. Bármelyik öt egymás mellett álló diák közül pontosan egynek van piros sapkája és bármelyik hét egymás mellett álló diák közül pontosan egynek van fehér sapkája. Határozd meg:

- a) legalább hány diáknak lehet zöld sapkája?
- b) legfeljebb hány diáknak lehet zöld sapkája?

Mátéfi István, Marosvásárhely

3. feladat

A Kisherceg nagyon szereti, bolygóján ülve, a csillagos égboltot figyelni. Idén a *Csavargó* nevű üstökös tanulmányozta és megállapította, hogy a tömegvesztése miatt a visszatérési ideje mindig növekszik. Az idén is visszatérő üstökösről feljegyzéseket talált: az üstökös először időszámításunk után 5-ben volt látható, majd 65-ben ismét visszatért. Kiszámolta azt, hogy legközelebb 137 020 év múlva tér vissza. Határozd meg, milyen szabály szerint kering az üstökös!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

4. feladat

Egy labdarugó bajnokságban az *Aranylábúak*, a *Gólvágók*, a *Villámgyorsak* és a *Ólomlábúak* csapatok mindegyike egy-egy mérkőzést játszott a többi három csapat ellen. A verseny végén a következő táblázatot hozták nyilvánosságra:

Hely	Csapat neve	Mérkőzések száma			Gólok száma	
		nyert	döntetlen	vesztett	lőtt	kapott
1.	Aranylábúak	2	1	0	4	1
2.	Gólvágók	2	0	1	4	1
3.	Villámgyorsak	0	2	1	1	2
4.	Ólomlábúak	0	1	2	0	5

Milyen eredménnyel végződtek az egyes mérkőzések?

Nagy Baló András, Budapest

**5. feladat**

Egy derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából az átfogóra bocsátott magasság a hegyesszögek szögfelezőivel olyan α és β hegyesszögeket zár be, amelyekre teljesül az $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{5}$ összefüggés. Mekkora a háromszög hegyesszögei?

Bíró Bálint, Eger

6. feladat

Az ABC háromszögben $AB = AC$ és a B szög mértéke 80° . Az AB oldalon felvesszük a D pontot úgy, hogy $AD = BC$. Az AD szakaszra megszerkesztjük, az ABC háromszög síkjában, az ABC háromszögön kívül az ADE egyenlő oldalú háromszöget.

Igazold, hogy: a) $[CD]$ félegyenes szögfelezője az ACE szögnek!

b) EMB háromszög egyenlő szárú, ahol M az EC és AB szakaszok metszéspontja!

Koczinger Éva, Szatmárnémeti



7. (8.) évfolyam

1. feladat

100 diót úgy osztottak el a gyerekek között, hogy az első kapott valahány diót, a második 1-gyel többet, mint az első, a harmadik 1-gyel többet, mint a második, és így tovább, minden gyerek 1-gyel többet kapott, mint az előtte levő.

Hány gyerek között oszthatták el a diókat, és hány diót kapott egy-egy gyerek?

Szabó Magda, Szabadka

2. feladat

Az $ABCD$ paralelogramma oldalaira a paralelogrammán kívül szerkeszd meg az $ABCD$ paralelogramma síkjában az ABE , BCF , CDG és DAH egyenlő oldalú háromszögeket!

- Igazold, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma!
- Bizonyítsd be, hogy az $EFGH$ és $ABCD$ paralelogrammák középpontjai egybeesnek!
- Milyen $ABCD$ paralelogramma esetén lesz az $EFGH$ négyszög téglalap?

Simon József, Csíkszereda

3. feladat

Határozd meg azokat az a , b , c tízes számrendszerbeli számjegyeket, amelyekre fennállnak a következő összefüggések:

$$\begin{cases} \overline{aa} \cdot \overline{ab} = \overline{bb} \cdot \overline{ba} \\ \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 999 \end{cases}.$$

dr. Bencze Mihály, Bukarest

4. feladat

Keresd meg az összes olyan háromjegyű számpárt, amelyek tagjainak különbsége 100, és amelyek közül az egyik 6-tal, a másik pedig 7-tel osztható!

Róka Sándor, Nyíregyháza

5. feladat

Az $ABCD$ trapézban $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$ és $AB = 2 \cdot DC$. Az E és F pontok a BC oldalt három egyenlő részre osztják: $BE = EF = FC$. Tudjuk, hogy $AF \cap DE = \{O\}$. Igazold, hogy:

- $T_{AEF} = 2 \cdot T_{DEF}$;
- $T_{AEF} = \frac{2}{9} \cdot T_{ABCD}$;
- $T_{OEF} = \frac{1}{27} \cdot T_{ABCD}$!

Simon József, Csíkszereda



6. feladat

Határozd meg az összes olyan 3-tól különböző p prímszámot, amelyre a $\left| \frac{p^2 + 19}{p - 3} \right|$ tört értéke szintén prímszám!

Bíró Bálint, Eger



8. (9.) évfolyam

1. feladat

Igazold, hogy az $n^{2015} - n^{2011}$ szám osztható 30-cal, bármely n természetes szám esetén!

Polcz Zita, Szatmárnémeti

2. feladat

Egy 256 cm^2 területű négyzetnek levágtunk a sarkaiból négy egymással egybevágó egyenlőszárú derékszögű háromszöget. Az így kapott nyolcszög kerülete egyenlő a levágott négy háromszög területének az összegével. Számítsd ki a nyolcszög kerületét és területét!

Tóth Gabriella, Palics

3. feladat

a) Ha $a, b, c \in \mathbb{R}$, igazold, hogy teljesül a következő azonosság:

$$(a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (-a + b + c)^2 + (a + b + c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

b) Igazold, hogy $2014^{2014} + 2016^{2016} + 2018^{2018}$ felírható négy különböző egész szám négyzeteinek összegeként!

Dr. Bencze Mihály, Bukarest

4. feladat

Adott az $ABCD$ konvex (domború) négyszög, melyben A - és B -s szögek pót szögek. Igazold, hogy:

a) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$;

b) az $ABCD$ négyszög síkjában a D pontban az AD oldalra és a C pontban a BC oldalra húzott merőlegesek, egymásra is merőlegesek!

Oláh Miklós, Kraszna

5. feladat

Egy nagy kockát ragasztunk össze 27 darab szabályos dobókockából, majd a nagy kocka tetszőleges öt lapjának mindegyikéből kivesszük a középső dobókockát. Mennyi lehet az így kapott mértani test felületén látható pöttyök száma, ha az a lehető legkevesebb? (A szabályos dobókocka lapjai 1-től 6-ig pöttyözöttek, és a szemközti lapokon lévő pöttyök számának összege 7).

Csordás Mihály, Kecskemét



6. feladat

Koppány szereti a csokit. Ahhoz, hogy ne vigye túlzásba a fogyasztását, anyukája egy páncélszekrénybe zárta a csokikat. A páncélszekrény zárszerkezetéhez egy jobbra vagy balra fordítható kulcs és egy kijelző tartozik. A zárszerkezet működési elve a következő: a kijelzőn egy változó értékű k természetes szám jelenik meg, amely egy másik, szintén változó $n = 2^k$ számnak felel meg. Ha a kulcsot jobbra fordítják akkor a zárszerkezethez tartozó tárcsa $2 \cdot n$ elemi fordulatot tesz és a k értéke eggyel növekszik, ha pedig balra akkor $\frac{n}{2}$ elemi fordulatot tesz és a k értéke pedig eggyel csökken. A tárcsa mindig azonos irányba forog. A páncélszekrény csak akkor nyit, ha először k -szor jobbra fordítják a kulcsot, ezek után a k értéke visszaáll az eredeti k értékre, amit az elején a kijelzőn láttunk és ezek után k -szor balra fordítják. Ha becsukják a páncélszekrényt, k értéke eggyel növekszik az előbbi becsukásnál kapott k értékhez viszonyítva (a k értékét csak a zárszerkezet módosíthatja). Koppány megtalálta a páncélszekrény nyitásának leírását és néhányszor már „szerzett” csokit. Milyen érték volt a kijelzőn, ha tudjuk, hogy a tárcsa az utolsó nyitáskor 2015 elemi fordulatot tett? Mennyi elemi fordulat volt a harmadik nyitáskor?

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad



Megoldások



5. (6.) évfolyam - megoldások

1.feladat

Határozd meg azokat az n nem nulla, egyjegyű természetes számokat, amelyeket, ha megszorunk 38-cal, majd a szorzatot 76-tal, és a kapott eredményekhez hozzáadunk 7-et, olyan számokat kapunk, amelyeknek az utolsó számjegye 9!

Szabó Magda, Szabadka

Megoldás: Ha a végeredményből elveszünk 7-et, akkor 2-re végződő számot kapunk.

Ez a szám $38 \cdot 76 \cdot n$, amiből $38 \cdot 76$ szorzat utolsó számjegye 8.

Mivel $4 \cdot 8 = 32$ és $9 \cdot 8 = 72$, az n értéke 4 vagy 9 lehet.

2. feladat

A 2, 3, 5, 11, 13, 19, 31, 53 és 61 számokat helyezzük el hármas csoportokban úgy, hogy az egyes csoportokban levő számok szorzatai egymás utáni természetes számok legyenek!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás: Először alkossunk hármas csoportokat nagyság szerint véve az adott számokat:

(2, 3, 5), (11, 13, 19), (31, 53, 61), majd az egyes csoportokból választunk egy-egy számot.

Ha az első csoportból a 2-es számot választjuk, akkor a második és harmadik csoportból való választáskor két lehetőségünk marad:

2, 13, 61, ezek szorzata $2 \cdot 13 \cdot 61 = 1586$ vagy 2, 19, 53, ezek szorzata $2 \cdot 19 \cdot 53 = 2014$.

Ezután, ha az első csoportból a 3-as számot választjuk, akkor az alábbi lehetőségek maradnak:

3, 11, 61, ezek szorzata $3 \cdot 11 \cdot 61 = 2013$ vagy 3, 19, 31, ezek szorzata $3 \cdot 19 \cdot 31 = 1767$.

Végül az első csoportból választjuk az 5-ös számot, a megmaradt csoportokból pedig a 13-at illetve a 31-et, melyek szorzata: $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015$.

Tehát a feltételnek megfelelő csoportosítások:

3, 11, 61, ezek szorzata $3 \cdot 11 \cdot 61 = 2013$

2, 19, 53, ezek szorzata $2 \cdot 19 \cdot 53 = 2014$

5, 13, 31, ezek szorzata $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015$

3. feladat

Adott az $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2015} + 2^{2016}$ természetes szám.

c) Igazold, hogy A osztható 30-cal.

d) Határozd meg a p és q prímszámokat tudva azt, hogy:

$$(2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2015} + 2^{2016}) : (1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{2012}) + p \cdot q = 2015.$$

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás: a) $A = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^4 \cdot (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{2012} \cdot (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$,

tehát $A = 30 \cdot (1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{2012})$, ahonnan kapjuk, hogy $A : 30$.

b) Az a) alpont szerint $(2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2015} + 2^{2016}) : (1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{2012}) = 30$

Az adott egyenlet $30 + p \cdot q = 2015$ alakban írható, ahonnan kapjuk, hogy $p \cdot q = 1985$.

Tehát $p=5$ és $q=397$ vagy fordítva: $q=5$ és $p=397$

**4. feladat**

Határozd meg azokat az a, b és c tízes számrendszerbeli számjegyeket, amelyekre fennáll a következő egyenlőség: $(\overline{aaaa})^2 + (\overline{bbbb})^2 + (\overline{cccc})^2 = 12221^2$.

Dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás: $(\overline{aaaa})^2 + (\overline{bbbb})^2 + (\overline{cccc})^2 = a^2 \cdot 1111^2 + b^2 \cdot 1111^2 + c^2 \cdot 1111^2 = (11 \cdot 1111)^2$

azaz $a^2 + b^2 + c^2 = 121$.

Legyen $a \geq b \geq c$.

Ha $a \leq 6$, $b \leq 6$ és $c \leq 6$, akkor $a^2 + b^2 + c^2 \leq 108$, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

Ha $a = 7$, akkor $b^2 + c^2 = 72$, tehát $b = c = 6$ megoldás.

Ha $a = 8$, akkor $b^2 + c^2 = 57$, tehát nincs megoldás.

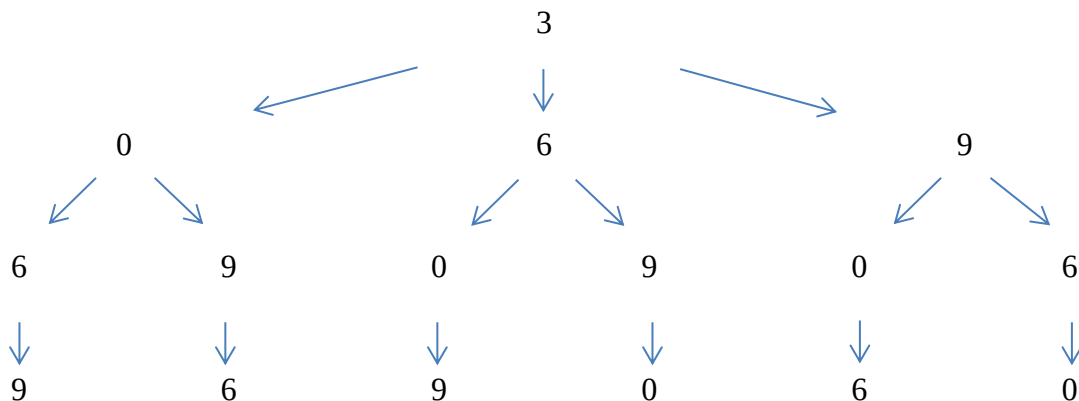
Ha $a = 9$, akkor $b^2 + c^2 = 40$, tehát $b = 6$ és $c = 2$.

5. feladat

Hány olyan n jegyű ($n \geq 2$) természetes szám van a tízes számrendszerben, amelynek számjegyei különbözőek, és minden két szomszédos számjegyének összege osztható 3-mal?

Gecse Frigyes, Kisvárd

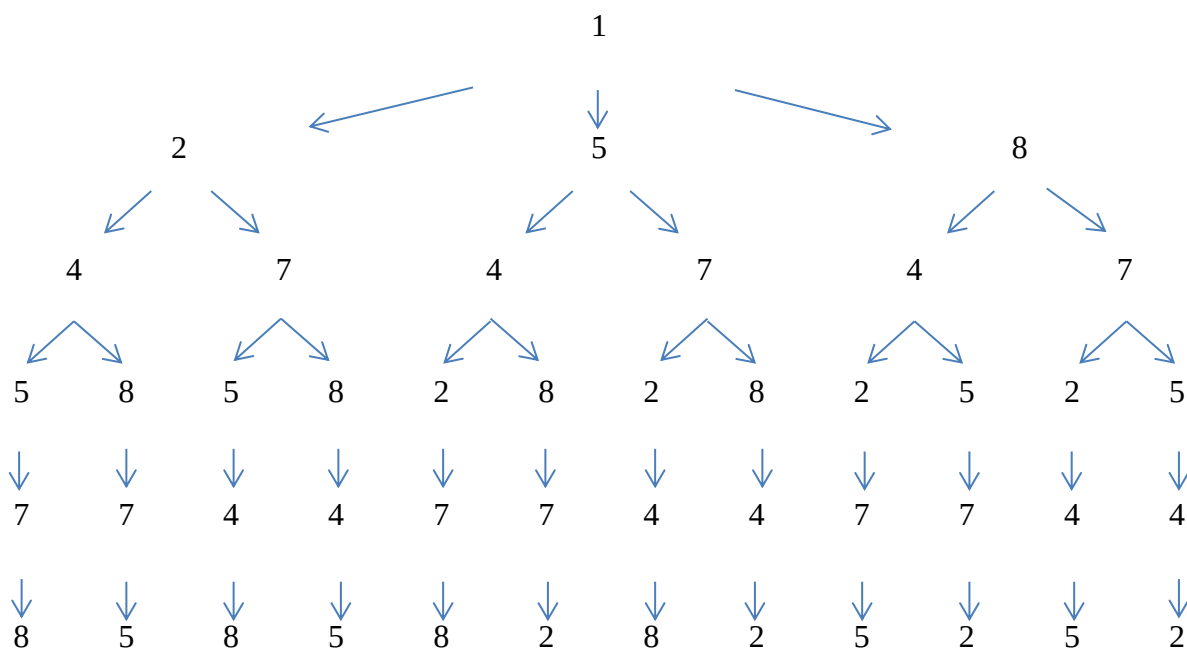
Megoldás: Ha a szám 3-mal kezdődik, akkor az utána következő számjegyeket az alábbi ábrán mutatjuk be:



Az ábrán láthatjuk, hogy a 3-mal kezdődő számok esetén kétjegyűből 3 db. van (30, 36, 39), háromjegyűből 6 db. (306, 309, 360, 369, 390, 396), négyjegyűből is 6 db. (3069, 3096, 3609, 3690, 3906, 3960), négynél többjegyű szám pedig nincs.

Hasonló a helyzet abban az esetben, amikor a szám 6-tal vagy 9-cel kezdődik.

Ha a számok 1, 2, 4, 5, 7 vagy 8-cal kezdődnek, akkor minden esetben azonos számú eredményt kapunk. Az alábbi ábrán látható az az eset, amikor a szám első számjegye az 1:



Az ábrán láthatjuk, hogy az 1-gyel kezdődő számok esetén kétjegyűből 3 db. van, háromjegyűből 6 db, négy-, öt- és hatjegyűből külön-külön 12 db. Hatnál többjegyű szám pedig nincs.

Ehhez hasonló táblázatból 6 db van. Ha $n \geq 2$ esetén a keresett számok száma:

n értékei	A keresett számok száma
2	$6 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 27$
3	$6 \cdot 6 + 6 \cdot 3 = 54$
4	$6 \cdot 12 + 6 \cdot 3 = 90$
5	$6 \cdot 12 = 72$
6	$6 \cdot 12 = 72$
$n \geq 7$	0

6. feladat

A sárkány, hogy mentse az életét, megmutatta Jánosnak az aranyrudakat tartalmazóládáját, és azt mondta: „Tegyél a zsákodba legalább egy aranyrudat. Azután én visszateszek a zsákodból a ládámba legalább egy rudat, de más darabszámút, mint ahányat te elvettél. Így fogjuk egymás után rakosgatni a rudakat: te a ládából a zsákodba, én a zsákodból a ládámba, de minden egyes alkalommal az összes korábbi áttevéstől különböző darabszámút. Amikor ennek a szabálynak a betartásával már nem lehet folytatni az áttevést, elviheted, ami éppen akkor lesz a zsákodban.” Legtöbb hány aranyrúddal távozhatott János, ha a ládában eredetileg 10 aranyrúd volt, és a



sárkány mindent megtett azért, hogy János a lehető legkevesebb aranyrudat kapjon?

Nagy Baló András, Budapest

Megoldás: János akkor tudta „irányítani” a rakosgatást, ha a sárkány minden alkalommal csak egyféleképpen vehetett vissza tőle az aranyrudakból (vagyis a sárkánynak mindig csak egy lehetősége maradt, mert az összes többi darabszám már előfordult az előző lépéseknél).

Megmutatjuk, hogy János legtöbb 9 aranyrudat szerezhette meg, ha a következő módon rakosgatott:

Ha először János a zsákjába tett 2 aranyrudat, a sárkány csak 1-et tudott visszavenni, így Jánosnál maradt 1 aranyrúd. Ezután János elvett 3 rudat (ekkor 4 volt nála), majd a sárkánynak 4-et kellett visszavennie (így 0 rúd maradt Jánosnál).

Utána János elvett 6 rudat (ekkor 6 volt nála), így a sárkánynak 5-öt kellett visszavennie (és 1 maradt Jánosnál). Ezután János elvett 7 rudat (ekkor 8 volt nála), majd a sárkánynak mind a 8-at vissza kellett vennie (így 0 maradt Jánosnál).

Az utolsó lépésként János elvett a sárkánytól 9 aranyrudat, és ezt követően a sárkány már nem tudott egyet sem visszavenni, hiszen 1-től 9-ig mindegyik darabszám szerepelt már valamelyik átrakásnál.

A következő táblázatban is végigkövethetjük a rakosgatást:

lépés	János elvett	sárkány visszavett	Jánosnál	sárkánynál
1.	2		2	8
2.		1	1	9
3.	3		4	6
4.		4	0	10
5.	6		6	4
6.		5	1	9
7.	7		8	2
8.		8	0	10
9.	9		9	1

Végül belátjuk, hogy János nem szerezhette meg mind a 10 aranyrudat a sárkánytól. Ha ugyanis a rakosgatás úgy végződött volna, hogy mind a 10 aranyrúd Jánosnál van, és a sárkány ezek közül semennyit nem tud már visszavenni, akkor ez az állapot csak úgy állhatott volna elő, ha a korábbi rakosgatások során 1-től 10-ig mindegyik szám szerepelt már egyszer valamelyik átrakásnál. Ez azt jelentené, hogy a befejezésig pont 10 átrakás történt. Viszont, mivel az átrakásokat János kezdte, így a 2., 4., 6., 8. és 10. átrakásoknál a sárkány vett vissza valahány rudat a zsákból. Tehát az utolsó (a 10-edik) átrakás esetében is a sárkány vett el néhány aranyrudat Jánostól, így ezt követően nem maradhatott Jánosnál 10 aranyrúd. Ez az eset tehát nem lehetséges. Vagyis János legtöbb 9 aranyrudat tudott megszerezni.



6. (7.) évfolyam - megoldások

1. feladat

Egy 5×5 -ös négyzetrács bal alsó négyzetében ül egy bolha. Ugrania csak jobbra vagy felfelé szabad, de az ugrás hossza bármekkora lehet. Hányféleképpen juthat el a jobb felső négyzetbe?

Horváth Katalin, Komárom

Megoldás:

A bal alsó sarokból indulva jobbra a második négyzetre egyféleképpen ugorhat a bolha.

A bal alsó sarokból indulva jobbra a harmadik négyzetre kétféleképpen ugorhat a bolha: $1+1=2$

A bal alsó sarokból indulva jobbra a negyedik négyzetre 4 féleképpen ugorhat a bolha, hiszen az alsó sor bármelyik tőle balra levő négyzetéről el tud ide jutni $1+1+2 = 4$. Hasonlóan az alsó sor utolsó négyzetére $1+1+2+4=8$ féleképpen tud ugrani. Ugyanez érvényes az első oszlopra is.

8	28	94	289	838
4	12	37	106	289
2	5	14	37	94
1	2	5	12	28
1	1	2	4	8

Nézzük például alulról a második sor negyedik négyzetét. Ide a közvetlenül alatta levő négyzetről, vagy az adott sorban tőle balra levő négyzetekről tud átugrani: $4+1+2+5=12$

Alulról a harmadik sor negyedik négyzetébe az alatta levő négyzetekről, vagy a tőle balra levő négyzetekről tud átugrani: $4 + 12 + 2 + 5 + 14 = 37$. Így kitölthetjük a mellékelt négyzetrácsot és eszerint a jobb felső sarokba 838 féleképpen ugorhat a bolha.

2. feladat

Az iskola udvarán a diákok egy sorban egymás mellett állnak. Minden diáknak vagy piros, vagy fehér, vagy zöld sapka van a fején. Bármelyik öt egymás mellett álló diák közül pontosan egynek van piros sapkája és bármelyik hét egymás mellett álló diák közül pontosan egynek van fehér sapkája. Határozd meg:

a) legalább hány diáknak lehet zöld sapkája?

b) legfennebb hány diáknak lehet zöld sapkája?

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás:

- a) Legalább hét diák kell legyen a sorban. Ezek között pontosan egy fehér sapkás diák van. Akkor lesz a zöld sapkások száma a legkisebb, ha a piros sapkások száma a lehető



legnagyobb, vagyis 2. (ha az 1. és 6. vagy a 2. és 7. diák sapkája piros). Tehát legkevesebb $7 - 1 - 2 = 4$ zöld sapkás diák van.

- b) Bármelyik öt egymás mellett álló diák közül pontosan egynek van piros sapkája, tehát legfennebb minden ötödik diáknak piros sapkája van. Mivel bármelyik hét egymás mellett álló diák közül pontosan egynek van fehér sapkája, legfennebb minden hetedik diáknak fehér sapkája van. $(5, 7) = 1$ tehát legfennebb 34 diák van az iskola udvarán (Azért nem 35, mert akkor az utolsó diáknak piros és fehér sapkája is van). A 34 diákból legfennebb hatnak piros és legfennebb 4 fehér sapkája van. Tehát legfennebb $34 - (6 + 4) = 24$ diáknak lehet zöld sapkája.

3. feladat

A Kisherceg nagyon szereti, bolygóján ülve, a csillagos égboltot figyelni. Idén a *Csavargó* nevű üstökös tanulmányozta és megállapította, hogy a tömegvesztesége miatt a visszatérési ideje mindig növekszik. Az idén is visszatérő üstökösről feljegyzéseket talált: az üstökös először időszámításunk után 5-ben volt látható, majd 65-ben ismét visszatért. Kiszámolta azt, hogy legközelebb 137 020 év múlva tér vissza. Határozd meg, milyen szabály szerint kering az üstökös!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás:

Észre kell venni, hogy $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ és azt, hogy az első három évszám: 5, $5 \cdot 13 = 65$ és $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015$.

Továbbá 137020 év múlva 139035 lesz, amire igaz, hogy $139035 = 5 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 69$.

Tehát ha megtaláljuk az 5, 13, 31, 69 sorozat képzési szabályát, akkor megtaláltuk a megoldást. Ez pedig:

$$n = 1, \quad 5$$

$$n = 2, \quad 13 = 2 \cdot 5 + 3$$

$$n = 3, \quad 31 = 2 \cdot 13 + 5$$

$n = 4, \quad 69 = 2 \cdot 31 + 7$. Azaz az előbbi értéket duplázzuk (kivéve a legelsőt) és hozzáadjuk a következő páratlan számot (amelyet 3-tól kezdünk).

Megjegyzés: természetesen a sorozat tovább is folytatható és a világ végezetéig is kiszámíthatjuk a *Csavargó* üstökös megjelenési éveit.



4. feladat

Egy labdarugó bajnokságban az *Aranylábúak*, a *Gólvágók*, a *Villámgyorsak* és a *Ólomlábúak* csapatok mindegyike egy-egy mérkőzést játszott a többi három csapat ellen. A verseny végén a következő táblázatot hozták nyilvánosságra:

Hely	Csapat neve	Mérkőzések száma			Gólok száma	
		nyert	döntetlen	vesztett	lőtt	kapott
1.	Aranylábúak	2	1	0	4	1
2.	Gólvágók	2	0	1	4	1
3.	Villámgyorsak	0	2	1	1	2
4.	Ólomlábúak	0	1	2	0	5

Milyen eredménnyel végződtek az egyes mérkőzések?

Nagy Baló András, Budapest

Első megoldás:

Gólvágók 1 vereséget szenvedtek és összesen 1 gólt kaptak, ezért amelyik mérkőzésen vereséget szenvedtek azt $1 : 0$ -ra veszítették el. Villámgyorsak és Ólomlábúak egyetlen mérkőzést sem nyertek, így **Aranylábúak voltak, akik $1 : 0$ -ra verték Gólvágókat.**

Ólomlábúak egyetlen gólt sem rúgott és volt döntetlenjük, így az a mérkőzés $0 : 0$ -ra végződött, míg két vesztes meccsükön összesen 5 gólt kaptak. Mivel Villámgyorsak nem nyertek meg egyetlen mérkőzést sem, Ólomlábúak vesztes mérkőzései Aranylábúaktól és Gólvágóktól származik. Így a **Villámgyorsak – Ólomlábúak mérkőzésen lett $0 : 0$** az eredmény.

Gólvágók egyetlen kapott gólja Aranylábúaktól származik, így a Villámgyorsak által lőtt egyetlen gólt Aranylábúak kapták. Mivel Villámgyorsak 2 döntetlent játszott, Gólvágók pedig nem játszottak döntetlent, ezért a Villámgyorsak – Aranylábúak mérkőzés döntetlennel végződött, amelyen 1 gólt szereztek a Villámgyorsak. Így ennek a mérkőzésnek az eredménye: **Villámgyorsak – Aranylábúak $1 : 1$.**

Villámgyorsak másik kapott gólja csakis Gólvágóktól eshetett (Ólomlábúak egy gólt sem szerzett a tornán), így a **Gólvágók – Villámgyorsak eredménye $1 : 0$.**

Gólvágók eddig megismert két mérkőzésén 1 gólt kaptak és 1-et lőttek, összesített gólarányuk $4 : 1$, így a harmadik mérkőzésen $3 : 0$ -ra nyertek, amit Ólomlábúak csapattal játszottak. Tehát **Gólvágók-Ólomlábúak $3 : 0$** -ra végződött.

Ólomlábúak 5 góljából ezek szerint kettőt Aranylábúaktól kellett kapjanak, így **Aranylábúak-Ólomlábúak $2 : 0$.**

Második megoldás:

Az előbbi megoldáshoz hasonlóan, azonnal következik, hogy az **Aranylábúak $1 : 0$** -ra verték a **Gólvágókat** és a **Villámgyorsak – Ólomlábúak mérkőzésen $0 : 0$** lett az eredmény.



Tételezzük fel, hogy ez volt a csoportban az utolsó forduló és rekonstruáljuk az ez előtti táblázatot (helyezéstől eltekintve):

Hely	Csapat neve	Mérkőzések száma			Gólok száma	
		nyert	döntetlen	vesztett	lőtt	kapott
	Aranylábúak	1	1	0	3	1
	Gólvágók	2	0	0	4	0
	Villámgyorsak	0	1	1	1	2
	Ólomlábúak	0	0	2	0	5

Jelöljük a mérkőzések eredményeit a következőképpen:

Aranylábúak - Villámgyorsak $x : x$ (ez volt az egyedüli döntetlen mérkőzés)

Gólvágók – Ólomlábúak $y : 0$ (mert az Ólomlábúak nem lőttek gólt)

Aranylábúak - Ólomlábúak $u : 0$ (mert az Ólomlábúak nem lőttek gólt)

Gólvágók – Villámgyorsak $t : p$

A lőtt és kapott gólok alapján felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$\begin{cases} x + u = 3 \\ y + t = 4 \\ x + p = 1 \\ x + t = 2 \\ y + u = 5 \end{cases} \text{ mivel a Villámgyorsak csak egy gólt lőttek } x=1 \text{ és azonnal kapjuk, hogy}$$

$p=0, u=2, t=1, y=3$. Tehát a mérkőzések eredményei:

Aranylábúak - Villámgyorsak $1 : 1$

Gólvágók – Ólomlábúak $3 : 0$

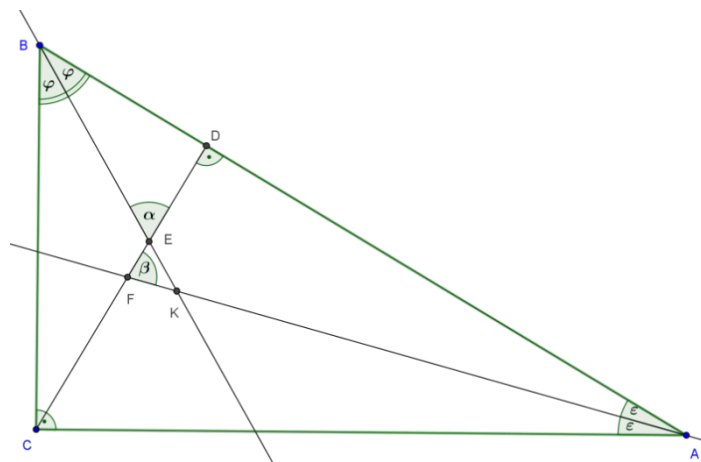
5. feladat

Egy derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából az átfogóra bocsátott magasság a hegyesszögek szögfelezőivel olyan α és β hegyesszögeket zár be, amelyekre teljesül az $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{5}$ összefüggés. Mekkora a háromszög hegyesszögei?

Bíró Bálint, Eger

Első megoldás:

a feltételeknek megfelelő ábrát készítünk, amelyen K -val jelöltük a hegyesszögek szögfelezőinek metszéspontját, vagyis a háromszög beírt körének középpontját.



Az ABC háromszög hegyesszögeinek összege $2\varepsilon + 2\varphi = 90^\circ$, innen $\varepsilon + \varphi = 45^\circ$, illetve $\angle AKB = 135^\circ$ és

$$(1) \quad \angle EKF = 45^\circ.$$

Mivel a csúcsszögek egyenlők, ezért $\angle FEK = \alpha$, és így az FEK háromszögben (1) alapján

$$(2) \quad \alpha + \beta + 45^\circ = 180^\circ.$$

A (2) összefüggés szerint $\alpha + \beta = 135^\circ$.

Mivel azonban a feltétel szerint $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{5}$, és ezért $\alpha = \frac{4}{5}\beta$, innen pedig $\frac{4}{5}\beta + \beta = 135^\circ$, ahonnan egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$(3) \quad \beta = 75^\circ \text{ és } \alpha = 60^\circ.$$

A BED háromszögben $\alpha + \varphi = 90^\circ$, innen $\varphi = 30^\circ$, és ebből $\varepsilon + \varphi = 45^\circ$ alapján azonnal kapjuk, hogy $\varepsilon = 15^\circ$. Az ABC háromszög hegyesszögei tehát $2\varepsilon = 30^\circ$ és $2\varphi = 60^\circ$.

Második megoldás:

Az előbbi ábra jelöléseit használva, ADF háromszögben $m(\angle FAD) = 90^\circ - \beta$ és BED háromszögben $m(\angle EBD) = 90^\circ - \alpha$. Mivel AF és BE szögfelezők, következik:

$$2 \cdot (90^\circ - \beta) + 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 90^\circ. \text{ Innen következik, hogy } \alpha + \beta = 135^\circ.$$

Az $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{5}$ aránypárból származtatjuk a következőt: $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{9}{5}$. Ebből azonnal következik, hogy

$$\alpha = 60^\circ \text{ és } \beta = 75^\circ.$$

**6. feladat**

Az ABC háromszögben $AB = AC$ és a B szög mértéke 80° . Az AB oldalon felvesszük a D pontot úgy, hogy $AD = BC$. Az AD szakaszra megszerkesztjük, az ABC háromszög síkjában, az ABC háromszögon kívül az ADE egyenlő oldalú háromszöget.

Igazold, hogy: a) $[CD]$ félegyenes szögfelezője az ACE szögnek!

b) EMB háromszög egyenlő szárú, ahol M az EC és AB szakaszok metszéspontja!

Koczinger Éva, Szatmárnémeti

Első megoldás:

Tekintsük a következő ábrát:

a) A feladat adataiból következik, hogy a BAC szög mértéke 20° -os. Továbbá $CAE_\Delta \equiv ABC_\Delta$, mert

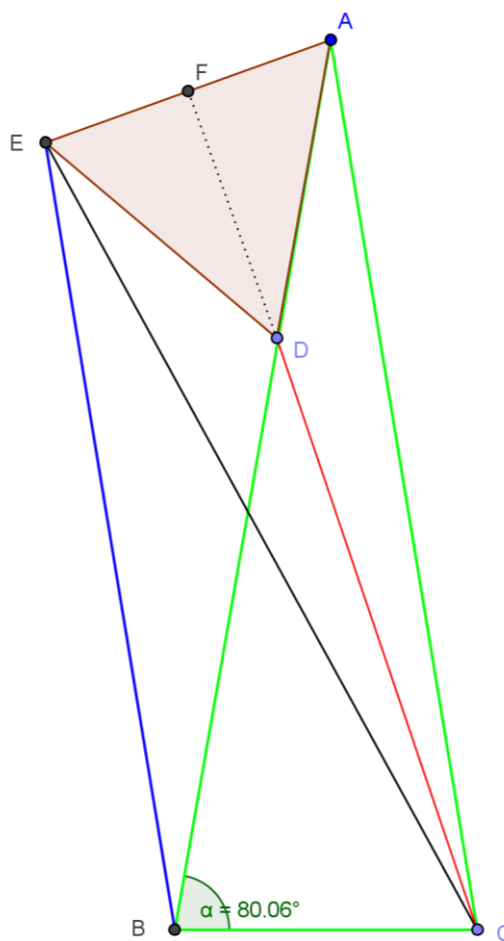
$$\begin{cases} EA = BC & \text{feltevés köv.} \\ CA = AB & \text{feltevés szerint (1. kongr. eset).} \\ m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{ABC}) = 80^\circ \end{cases}$$

Tehát CAE_Δ egyenlő szárú és ADE_Δ egyenlő oldalú, ezért

$$CDE_\Delta \equiv CDA_\Delta \Rightarrow DCE \equiv DCA, \text{ tehát } [CD]$$

félegyenes szögfelezője az ACE szögnek.

b) Mivel $CAE_\Delta \equiv ABC_\Delta \Rightarrow m(\widehat{ACM}) = 20^\circ \Rightarrow$
 AMC háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow AM = MC$ és $AB =$
 EC , ezért $EM = MB \Rightarrow EMB$ háromszög egyenlő szárú.

**Második megoldás:**

a) Az ADE egyenlő oldalú háromszögben a D csúsból húzott magasság, oldalfelező is. Az ABC háromszög kongruens a CAE háromszöggel, (OSzO), következik, hogy a CAE

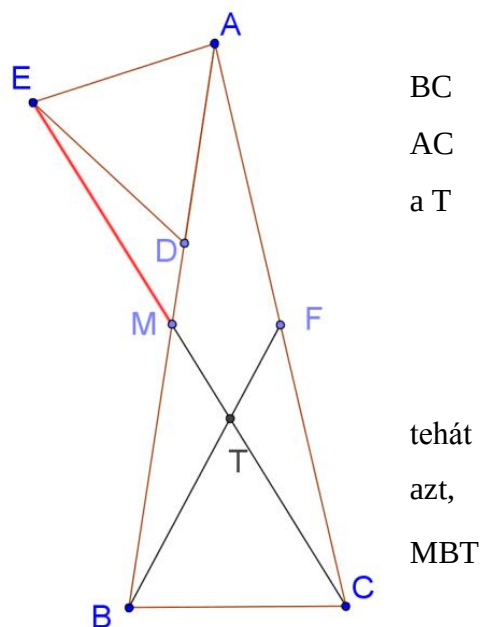


háromszög is egyenlő szárú. Ebben a háromszögben a C csúsból húzott oldalfelező, magasság is, szögfelező is. Az AE oldal felezőpontjában csak egyetlen merőleges húzható, következik, hogy ez a felezőpont a D és C ponttal egy egyenesen van.

Tehát $[CD]$ szögfelező.

b) tekintsük a következő ábrát:

Segédszerkesztést végzünk, a B és C csúcsokon keresztül a BC oldallal 60° -os szöget alkotó félegyeneseket, ezek az AB és AC oldalakat az G illetve az F pontokban metszi, egymást pedig pontban. A szerkesztésből következik, hogy a BTC háromszög egyenlő oldalú és egybevágó az EAD háromszöggel. Mivel $m(\angle TCA) = m(\angle ACE) = 20^\circ$, következik, hogy C, T, E egy egyenesen helyezkednek el, a G pont egybeesik az M ponttal. Ezeket figyelembe véve és hogy a EMD és BMT csúcsszögek következnek, hogy az EMD és BMT háromszögek egybevágóak, tehát $EM = MB$.





7. (8.) évfolyam - megoldások

1. feladat

100 diót úgy osztottak el a gyerekek között, hogy az első kapott valahány diót, a második 1-gyel többet, mint az első, a harmadik 1-gyel többet, mint a második, és így tovább, minden gyerek 1-gyel többet kapott, mint az előtte levő.

Hány gyerek között oszthatták el a diókat, és hány diót kapott egy-egy gyerek?

Szabó Magda, Szabadka

Megoldás:

I. megoldás

Legyen x az első gyerek dióinak száma.

A gyerekek száma	1	2	3	4	5	6	7
100 dió	x	$2x+1$	$3x+3$	$4x+6$	$5x+10$	$6x+15$	$7x+21$
A gyerekek száma	8	9	10	11	12	13	14
100 dió	$8x+28$	$9x+36$	$10x+45$	$11x+55$	$12x+78$	$13x+91$	$14x+105$

Ezek közül csak az $5x+10=100$ és a $8x+28=100$ felel meg. A többi esetben az egyenletek megoldása nem természetes szám, $x=1$ pedig a feladat feltételeinek nem felel meg.

Az első esetben $x=18 \Rightarrow (100-10):18=5$ gyerek között osztották el úgy, hogy a gyerekek rendre 18, 19, 20, 21, illetve 22 diót kaptak.

A második esetben $x=9 \Rightarrow (100-28):9=8$ gyerek között, amikor gyerekenként 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, illetve 16 dió jutott.

II. megoldás

Ha az 1. gyerek x diót kapott, akkor a 2. gyerek $x+1$ diót, a 3. gyerek $x+2$ diót, ..., az n . gyerek pedig $x+n-1$ diót kapott.

Felírhatjuk, hogy $x+x+1+x+2+\dots+x+n-1=100 \Rightarrow n \cdot x + (1+2+3+\dots+n-1)=100 \Rightarrow$

$$n \cdot x + \frac{(n-1) \cdot n}{2} = 100 \quad | \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 2nx + (n-1) \cdot n = 200 \quad \Rightarrow \quad n \cdot (2x+n-1) = 2^3 \cdot 5^2 \quad \Rightarrow$$

$$n \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100\}.$$

Megoldást a következő esetekben kapunk:

$$n=5 \Rightarrow x=18$$

$$n=8 \Rightarrow x=9.$$

**2. feladat**

Az $ABCD$ paralelogramma oldalaira a paralelogrammán kívül szerkeszd meg az $ABCD$ paralelogramma síkjában az ABE , BCF , CDG és DAH egyenlő oldalú háromszögeket!

d) Igazold, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma!

e) Bizonyítsd be, hogy az $EFGH$ és $ABCD$ paralelogrammák középpontjai egybeesnek!

f) Milyen $ABCD$ paralelogramma esetén lesz az $EFGH$ négyszög téglalap?

Simon József, Csíkszereda

Megoldás:**I. megoldás**

a) Mivel $HAE \triangleq FCG$, mert $[HA] \equiv [FC]$,

$[AE] \equiv [GC]$ és $HAE \triangleq FCG$ (o. sz. o. eset) $\Rightarrow$

$[HE] \equiv [GF]$. (1) Ugyanígy $HDG \triangleq FBE$, mert

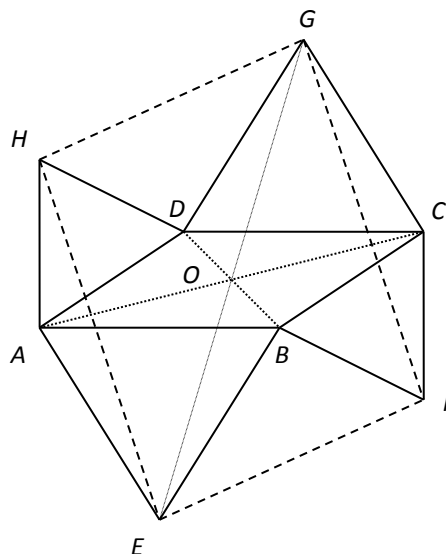
$[HD] \equiv [FB]$, $[GD] \equiv [BE]$ és $HDG \triangleq FBE \Rightarrow$

$[HG] \equiv [EF]$. (2)

Az (1) és (2) összefüggésekből következik, hogy az $EFGH$ négyszög paralelogramma.

b) Legyen O az $ABCD$ paralelogramma középpontja: $AC \cap BD = \{O\}$. Be kell bizonyítani, hogy az $EFGH$ paralelogramma $[EG]$ átlójának felezőpontja egybeesik az O ponttal. $m(\angle GDC) = m(\angle ABE) = 60^\circ$ és

$DC \parallel AB \Rightarrow [GD] \parallel [BE]$ és $[GD] \equiv [BE] \Rightarrow GDEB$ paralelogramma $\Rightarrow$ a $[GE]$ és $[DB]$ átlók éppen az O pontban metszik egymást, azaz a két paralelogramma középpontjai egybeesnek.

**II. megoldás**

a) Mivel $HDB \triangleq DBF$ (belső váltószögek) és $[HD] \equiv [BF] \Rightarrow HDBF$ paralelogramma $\Rightarrow$ a $[HF]$ és $[DB]$ átlók felezik egymást, azaz $HF \cap DB = \{O\}$. (1)

Mivel $GDO \triangleq OBE$ (belső váltószögek) és $[GD] \equiv [BE] \Rightarrow GDEB$ paralelogramma $\Rightarrow$ a $[GE]$ és $[DB]$ átlók is felezik egymást $\Rightarrow O \in GE$. (2)

Az (1) és (2) összefüggésekből következik, hogy a $[HF]$ és $[GE]$ szakaszok felezik egymást $\Rightarrow$ az $EFGH$ négyszög paralelogramma.

b) Mivel O az $[EG]$ és $[BD]$ átlók felezőpontja, azaz éppen a két paralelogramma középpontja, ezért a két paralelogramma középpontjai egybeesnek.

Mindkét megoldás esetén:

c) Ha $ABCD$ rombusz, akkor $[HD] \equiv [GD]$, $[DO] \equiv [DO]$ és $HDO \triangleq GDO \Rightarrow HDO \triangleq GDO \Rightarrow [HO] \equiv [GO] \Rightarrow [HF] \equiv [GE] \Rightarrow$ az $EFGH$ négyszög téglalap.

3. feladat

Határozd meg azokat az a , b , c tízes számrendszerbeli számjegyeket, amelyekre fennállnak a következő összefüggések:



$$\begin{cases} \overline{aa} \cdot \overline{ab} = \overline{bb} \cdot \overline{ba} \\ \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 999 \end{cases}.$$

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Az első egyenlőségéből azt kapjuk, hogy:

$$\overline{aa} \cdot \overline{ab} = \overline{bb} \cdot \overline{ba} \Leftrightarrow 11a \cdot (10a + b) = 11b \cdot (10b + a) \Leftrightarrow 110a^2 = 110b^2 \Leftrightarrow a = b.$$

A második egyenlőség szerint:

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111 \cdot (a + b + c) = 111 \cdot (2a + c) = 999.$$

Innen következik, hogy $2a + c = 9$.

I. eset: $c = 1 \Rightarrow a = b = 4$;

II. eset: $c = 3 \Rightarrow a = b = 3$;

III. eset: $c = 5 \Rightarrow a = b = 2$;

IV. eset: $c = 7 \Rightarrow a = b = 1$.

4. feladat

Keressd meg az összes olyan háromjegyű számpárt, amelyek tagjainak különbsége 100, és amelyek közül az egyik 6-tal, a másik pedig 7-tel osztható!

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás:

Ha a kisebb szám osztható 6-tal, a nagyobb pedig 7-tel, akkor a 600 és 700 egy ilyen számpár. További párokat úgy kapunk, ha a 6 és 7 valamely közös többszörösét, azaz 42-nek egy többszörösét ehhez hozzáadjuk vagy ebből kivonjuk.

Ezek a számpárok: (138, 238), (180, 280), (222, 322), (264, 364), ..., (894, 994). Ez összesen 19 számpár.

Ha a kisebbik szám osztható 7-tel, a nagyobb pedig 6-tal, akkor a 602 és 702 megfelelő számpár. Az előbbieken látott módon kapjuk a számpárokat: (140, 240), (182, 282), (224, 324), (266, 366), ..., (896, 996). Ez is 19 számpár.

Összesen $19 + 19 = 38$ megfelelő számpár van.

5. feladat

Az $ABCD$ trapézban $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$ és $AB = 2 \cdot DC$. Az E és F pontok a BC oldalt három egyenlő részre osztják: $BE = EF = FC$. Tudjuk, hogy $AF \cap DE = \{O\}$. Igazold, hogy:

d) $T_{AEF} = 2 \cdot T_{DEF}$;

e) $T_{AEF} = \frac{2}{9} \cdot T_{ABCD}$;

f) $T_{OEF} = \frac{1}{27} \cdot T_{ABCD}$!

Simon József, Csíkszereda

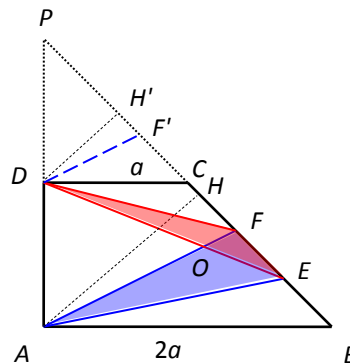


Megoldás:

a) Legyen $DC = a \Rightarrow AB = 2a$. Az AD és BC oldalak meghosszabbításai a P pontban metszik egymást. Legyen $AH \perp BP$ és $DH' \perp BP \Rightarrow AH \parallel DH'$. ($H, H' \in BP$)

$DC = \frac{AB}{2} \Rightarrow DC$ a PAB háromszög középvonala $\Rightarrow AD = DP$. Innen azt kapjuk, hogy DH' a PAH háromszög középvonala, következik, hogy $AH = 2 \cdot DH'$.

$$T_{AEF} = \frac{EF \cdot AH}{2} \text{ és } T_{DEF} = \frac{EF \cdot DH'}{2} \Rightarrow T_{AEF} = 2 \cdot T_{DEF}.$$



b) Az AEF és ABC háromszögek AH magassága egybeesik, $EF = \frac{1}{3}BC \Rightarrow T_{AEF} = \frac{1}{3}T_{ABC}$. (1)

Az ABC és ADC háromszögekben $AB = 2 \cdot DC$, az AD magasság megegyezik, következik, hogy $\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \frac{2}{1}$. Származtatással azt kapjuk, hogy $\frac{T_{ABC}}{T_{ABCD}} = \frac{2}{3} \Rightarrow T_{ABC} = \frac{2}{3}T_{ABCD}$. (2) Az (1) és (2) alapján azt

kapjuk, hogy $T_{AEF} = \frac{2}{9}T_{ABCD}$.

c) Legyen $DF' \parallel AF \Rightarrow DF'$ a PAF háromszög középvonala $\Rightarrow \frac{DF'}{AF} = \frac{1}{2}$ (3) és $PF' = F'F$, de $PF = \frac{4}{6}PB \Rightarrow F'F = \frac{2}{6}PB$, de $CF = \frac{1}{6}PB \Rightarrow F'C = CF$.

Az EDF' háromszögben $OF \parallel DF'$, a hasonlóság alaptételéből azt kapjuk, hogy $\frac{OF}{DF'} = \frac{EF}{EF'} = \frac{1}{3}$. (4)

A (3) és (4) egyenlőségek megfelelő oldalait összeszorozva azt kapjuk, hogy $\frac{OF}{AF} = \frac{1}{6} \Rightarrow$

$$T_{OEF} = \frac{1}{6}T_{AEF}, \text{ a b) alpont alapján } T_{OEF} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9}T_{ABCD} \Rightarrow T_{OEF} = \frac{1}{27}T_{ABCD}.$$

6. feladat

Határozd meg az összes olyan 3-tól különböző p prímszámot, amelyre a $\left| \frac{p^2 + 19}{p - 3} \right|$ tört értéke szintén prímszám!

Bíró Bálint, Eger

Megoldás:

A törtet átalakítjuk:

$$\frac{p^2 + 19}{p - 3} = \frac{p^2 - 9 + 28}{p - 3} = \frac{p^2 - 9}{p - 3} + \frac{28}{p - 3} = p + 3 + \frac{28}{p - 3}.$$

A tört akkor lesz egész szám, ha $p - 3$ osztója 28-nak.

Azt kapjuk, hogy $p - 3 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28\} \Rightarrow p \in \{4, 2, 5, 1, 7, -1, 10, -4, 17, -11, 31, -25\}$

Figyelembe véve, hogy p prímszám azt kapjuk, hogy $p \in \{2, 5, 7, 17, 31\}$.

Két megoldást kapunk: $p \in \{2, 7\}$.



8. (9.) évfolyam - megoldások

1. feladat

Igazold, hogy az $n^{2015} - n^{2011}$ szám osztható 30-cal, bármely n természetes szám esetén!

Polcz Zita, Szatmárnémeti

Megoldás:

Jelölje $A = n^{2015} - n^{2011}$.

Bebizonyítjuk, hogy A osztható 2-vel, 3-mal, 5-tel és mivel $(2, 3, 5) = 1$, ebből következik, hogy $A : 30$.

$n = 0$ és $n = 1$ esetén $A = 0$, tehát osztható 30-cal.

$n > 1$ esetén $A = n^{2010}n(n^4 - 1) = n^{2010}n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$.

$n(n - 1)$ osztható 2-vel, $(n - 1)n(n + 1)$ osztható 3-mal. Ha n osztható 5-tel, akkor A is osztható 5-tel.

Ha n nem osztható 5-tel, akkor:

$n = 5k + 1 \Rightarrow (n - 1) : 5 \Rightarrow A : 5$ vagy

$n = 5k + 2 \Rightarrow n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 5 \cdot (5k^2 + 4k + 1) : 5 \Rightarrow A : 5$ vagy

$n = 5k + 3 \Rightarrow n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 5 \cdot (5k^2 + 6k + 2) : 5 \Rightarrow A : 5$ vagy

$n = 5k + 4 \Rightarrow (n + 1) : 5 \Rightarrow A : 5$.

2. feladat

Egy 256 cm^2 területű négyzetnek levágtunk a sarkaiból négy egymással egybevágó egyenlőszárú derékszögű háromszöget. Az így kapott nyolcszög kerülete egyenlő a levágott négy háromszög kerületének az összegével. Számítsd ki a nyolcszög kerületét és területét!

Tóth Gabriella, Palics

Megoldás:

A négyzet oldala tehát 16 cm . Mivel a nyolcszög kerülete egyenlő a levágott négy háromszög kerületének az összegével, ebből következik, hogy

$$4a + 4b = 4b + 4 \cdot 2x$$

$$4a = 8x$$

$$a = 2x$$

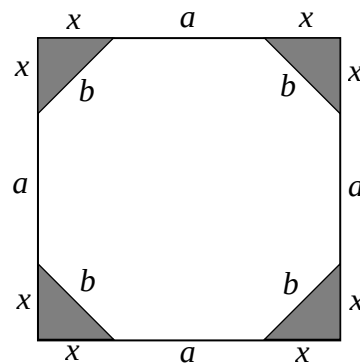
$$a + 2x = 16$$

$$4x = 16$$

$$x = 4 \text{ cm és } a = 8 \text{ cm}$$

Pitagorasz tételének alkalmazásával megkapjuk, hogy $b = 4\sqrt{2} \text{ cm}$.

A nyolcszög kerülete:





$$K = 4a + 4b = 16(2 + \sqrt{2})\text{cm}.$$

A nyolcszög területe:

$$T = 256 - 4 \cdot \frac{x^2}{2} = 224 \text{ cm}^2.$$

3. feladat

a) Ha $a, b, c \in \mathbb{R}$, igazold, hogy teljesül a következő azonosság:

$$(a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (-a + b + c)^2 + (a + b + c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

b) Igazold, hogy $2014^{2014} + 2016^{2016} + 2018^{2018}$ felírható négy különböző egész szám négyzeteinek összegeként!

Dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

$$\begin{aligned} \text{a) } (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (-a + b + c)^2 + (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc + a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 4(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

$$\text{b) } 2014^{2014} + 2016^{2016} + 2018^{2018} =$$

$$= 4[(2^{1006} \cdot 1007^{1007})^2 + (2^{1007} \cdot 1008^{1008})^2 + (2^{1008} \cdot 1009^{1009})^2].$$

$$\text{Legyen } x = 2^{1006} \cdot 1007^{1007}, y = 2^{1007} \cdot 1008^{1008} \text{ és } z = 2^{1008} \cdot 1009^{1009}.$$

Így $2014^{2014} + 2016^{2016} + 2018^{2018} = 4(x^2 + y^2 + z^2)$. Felhasználva az a) pont összefüggését kapjuk:

$$\begin{aligned} 2014^{2014} + 2016^{2016} + 2018^{2018} &= \\ &= (x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 + (-x + y + z)^2 + (x + y + z)^2. \end{aligned}$$

4. feladat

Adott az $ABCD$ konvex (domború) négyszög, melyben A és B pótyszögek. Igazold, hogy:

$$\text{c) } AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2;$$

d) az $ABCD$ négyszög síkjában a D pontban az AD oldalra és a C pontban a BC oldalra húzott merőlegesek, egymásra is merőlegesek!

Oláh Miklós, Kraszna

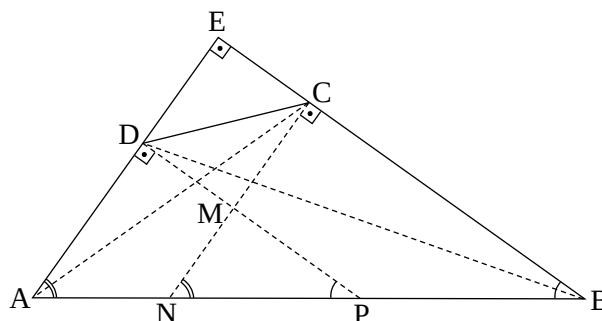
Megoldás:

a) Legyen $AD \cap BC = \{E\}$. Mivel az A és B pótyszögek az AEB szög derékszög, tehát az EAB_Δ , EDC_Δ , EAC_Δ és EDB_Δ háromszögek derékszögűek.

Pitágorász tételét alkalmazva:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2, \quad (1)$$

$$CD^2 = DE^2 + EC^2, \quad (2)$$





$$AC^2 = AE^2 + EC^2, \quad (3)$$

$$BD^2 = DE^2 + BE^2. \quad (4)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow AB^2 + CD^2 = AE^2 + BE^2 + DE^2 + EC^2$$

$$(3) + (4) \Rightarrow AC^2 + BD^2 = AE^2 + EC^2 + DE^2 + BE^2$$

$$\text{Tehát } AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2.$$

b) A D -ben és C -ben az AD illetve a BC oldalra emelt merőlegesek M -ben metszik egymást, az AB oldalt pedig P illetve N pontokban, így az MNP háromszöget képezik.

ADP derékszögű háromszögben az APD az A pótyszöge, innen: $NPM \equiv B$. (1)

BCN derékszögű háromszögben az BNC a B pótyszöge, innen: $MNP \equiv A$. (2)

(1) és (2) összefüggésekből

$$m(N) + m(P) = 90^\circ \Rightarrow m(M) = 90^\circ \Rightarrow DM \perp CM.$$

Megjegyzések:

1) Ha felhasználjuk a segédszerkesztéssel kapott EDC_Δ -et is, akkor egyszerűbben is igazolhatjuk, mert az $EDMC$ négyszögben

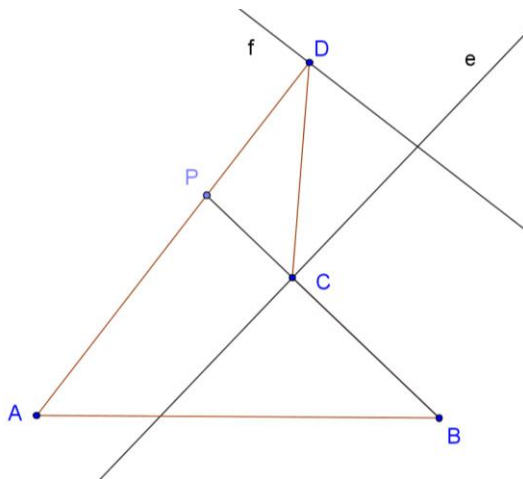
$$m(E) = m(D) = m(C) = 90^\circ \Rightarrow m(M) = 90^\circ.$$

2) Ha az M metszéspont AB -re vagy a négyszög külső tartományába esik, akkor is hasonló az igazolás.

Megjegyzés:

az adott tulajdonság érvényes konkáv (homorú) négyszög esetén is:

legyen $BC \cap AD = \{P\}$, mivel az ABP és PAB pótyszögek, következik, hogy $BP \perp AP$.



a) Pitagorasz tétel miatt: $BD^2 = PD^2 + BP^2$, $AC^2 = AP^2 + CP^2$, $AB^2 = AP^2 + BP^2$, $CD^2 = DP^2 + CP^2$, ezekből következik, hogy $BD^2 + AC^2 = AB^2 + CD^2$.

b) Mivel az f egyenes merőleges az AD oldalra és e egyenes merőleges az BC oldalra, következik, hogy az e egyenes párhuzamos az AD oldallal és f egyenes párhuzamos az BP oldallal. Ráadásul a BPD derékszög, ezért $e \perp f$.



5. feladat

Egy nagy kockát ragasztunk össze 27 darab szabályos dobókockából, majd a nagy kocka tetszőleges öt lapjának mindegyikéből kivesszük a középső dobókockát. Mennyi lehet az így kapott mértani test felületén látható pöttyök száma, ha az a lehető legkevesebb? (A szabályos dobókocka lapjai 1-től 6-ig pöttyözöttek, és a szemközti lapokon lévő pöttyök számának összege 7).

Csordás Mihály, Kecskemét

Megoldás:

Az elvétel után 22 darab szabályos dobókocka marad.

Közülük 8 a kocka 8 csúcsában helyezkedik el. Ezeknek 3 szomszédos lapja látszik a test felszínén, ezért ezeken a pöttyök számának összege $8 \cdot (1 + 2 + 3) = 48$, ha a legkevesebb.

A nagy kocka 12 élének mindegyike mentén 1 olyan dobókocka van, amely nem csúcsban található. Ezek közül 8-nak a két-két szemben lévő lapja látszik a test felületén. A két szemben lévő lapon a pöttyök számának összege 7, ezért ezeken a pöttyök számának összege $8 \cdot (7 + 7) = 112$.

A másik 4 dobókockának két szemben lévő és egy ezekkel szomszédos lapja látszik, ezeken a pöttyök száma $4 \cdot (1 + 7) = 32$, ha a legkevesebb.

A megmaradt két dobókocka közül az egyik valamelyik lap középső kockája. Ennek 1 lapja látszik, ezért ezen a pöttyök száma legalább 1.

A másik dobókocka középen helyezkedik el. Ennek öt lapja látható, ezért az ezen látható pöttyök számának összege $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, ha a legkevesebb.

Tehát az öt kocka elvétele után keletkezett test felületén legkevesebb

$48 + 112 + 32 + 1 + 15 = 208$ pötty látszik.

6. feladat

Koppány szereti a csokit. Ahhoz, hogy ne vigye túlzásba a fogyasztását, anyukája egy pánccs szekrénybe zárta a csokikat. A pánccs szekrény zárszerkezetéhez egy jobbra vagy balra fordítható kulcs és egy kijelző tartozik. A zárszerkezet működési elve a következő: a kijelzőn egy változó értékű k természetes szám jelenik meg, amely egy másik, szintén változó $n = 2^k$ számnak felel meg. Ha a kulcsot jobbra fordítják akkor a zárszerkezetéhez tartozó tárcsa $2 \cdot n$ elemi fordulatot tesz és a k értéke eggyel növekszik, ha pedig balra akkor $\frac{n}{2}$ elemi fordulatot tesz és a k értéke

pedig eggyel csökken. A tárcsa mindig azonos irányba forog. A pánccs szekrény csak akkor nyit, ha először k -szor jobbra fordítják a kulcsot, ezek után a k értéke visszaáll az eredeti k értékre, amit az elején a kijelzőn láttunk és ezek után k -szor balra fordítják. Ha becsukják a pánccs szekrényt, k értéke eggyel növekszik az előbbi becsukásnál kapott k értékhez viszonyítva (a k értékét csak a zárszerkezet módosíthatja). Koppány megtalálta a pánccs szekrény nyitásának leírását és néhányszor már „szerzett” csokit. Milyen érték volt a kijelzőn, ha tudjuk, hogy a tárcsa az utolsó nyitáskor 2015 elemi fordulatot tett? Mennyi elemi fordulat volt a harmadik nyitáskor?

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

**Megoldás:**

$k = 1$ -re a tárcsa elemi fordulatainak száma $2^2 + 2^0 = 5$, ezután a páncélszekrény kinyílik. Becsukva a k értéke eggyel növekszik, tehát $k = 2$ lesz. Erre az értékre az elemi fordulatok száma:

$$2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 27.$$

A 2015 kettes számrendszerbeli alakja a következő: 11111011111. Ez azt jelenti, hogy

$$2015 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

vagyis az utolsó nyitáskor k értéke 5 volt. Valóban ha az $n = 2^5$ értéktől indulunk és ötször jobbra fordítjuk a kulcsot, akkor a tárcsa rendre $2^6, 2^7, 2^8, 2^9$ és 2^{10} elemi fordulatot tesz, ezek után a k értéke visszaáll ötre és ha ötször balra fordítjuk a kulcsot, a tárcsa rendre $2^4, 2^3, 2^2, 2^1$ és 2^0 elemi fordulatot tesz. Ez összesen tehát 2015 elemi fordulat.

Észrevehetjük, hogy $k - 1$ értéke azt jelenti, hogy a páncélszekrényt eddig hányszor nyitották ki, a k pedig a soron következő nyitás értéke. Ennek értelmében a harmadik nyitáskor $119 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$ elemi fordulat volt.



Eredmények



	Diák neve	Oszt.	Ország	P1	P2	P3	P4	P5	P6		NMMV	Miniszteri díjak
1	KUN A. ÉDUA BORÓKA	5	ROMÁNIA	10	2	5	4	10	10	41,00	I	I
2	CSAPLÁR VIKTOR	5	FELVIDÉK	10	4	3	6	9	3	35,00	II	II
3	KOVÁCS RITA	5	MAGYARORSZÁG	10	1	1	3	9	6	30,00	II	III
4	KOTRÓ ELŐD	5	ROMÁNIA	8,5	1	1	5	7	6	28,50	III	D
5	KIS ANITA	5	ROMÁNIA	10	8	5	1	1	3	28,00	III	D
6	BALOGH ZSANETT	5	MAGYARORSZÁG	10	10	1	1	3	2	27,00	III	D
7	KOVÁCS ALEX	5	SZERBIA	8,5	3	5	5	2	3	26,50	III	D
8	BONTA RENÁTA BRITTA	5	ROMÁNIA	10	1	5	3	3	3	25,00	D	
9	KOVÁCS ÁLMOS	5	ROMÁNIA	10	3	3	6	1	2	25,00	D	
10	KAISER DÁNIEL	5	ROMÁNIA	9,5	1	5	1	6	1	23,50	D	
11	KORPONAY ALBERT	5	ROMÁNIA	10	1	5	1	5	1	23,00	D	
12	APRÓ DOROTTYA	5	SZERBIA	10	1	1	1	1	8	22,00	D	
13	FERENCZ ORSOLYA	5	MAGYARORSZÁG	10	1	1	3	1	6	22,00	D	
14	BACK ISTVÁN LEVENTE	5	ROMÁNIA	10	3	2	1	2	2	20,00	D	
15	ÉLES JÚLIA	5	ROMÁNIA	10	2	1	1	2	3	19,00		
16	HAPÁK ALEXANDRA	5	KÁRPÁTALJA	10	2	1	1	2	3	19,00		
17	KOLESZÁR DOMONKOS	5	MAGYARORSZÁG	8,5	2	1	1	3	3	18,50		
18	BODA EDINA	5	ROMÁNIA	5	2	2	4	2	3	18,00		
19	ÁROS CSENGER	5	MAGYARORSZÁG	8,5	4	1	1	1	2	17,50		
20	SZABÓ ESZTER	5	MAGYARORSZÁG	10	1	1	1	1	2	16,00		
21	VARGAY ANDRÁS DÁVID	5	MAGYARORSZÁG	1	2	1	1	1	10	16,00		
22	BERSZÁN ÖRS	5	ROMÁNIA	7	1	2	1	2	2,5	15,50		
23	GERENYI GERGŐ	5	FELVIDÉK	8,5	1	1	1	1	2	14,50		
24	BENE ZOLTÁN	5	MAGYARORSZÁG	7	1	1	1	1	2	13,00		
25	SZILAGYI BOTOND	5	ROMÁNIA	2	1	4	1	2	3	13,00		
26	LELOVICS GERGELY	5	FELVIDÉK	5	1	1	1	1	3	12,00		
27	RÉVÉSZ MÁTÉ	5	MAGYARORSZÁG	6	1	1	1	1	2	12,00		
28	SINKOVICS ALEX	5	SZERBIA	4	1	1	1	1	3	11,00		
29	SZILÁGYI VANDA	5	KÁRPÁTALJA	3	2	1	1	1	2	10,00		
30	BORCSIK ZSANETT	5	KÁRPÁTALJA	4	1	1	1	1	1	9,00		
31	SZEKERES ALEX	5	FELVIDÉK	1	1	1	1	1	1	6,00		
1	GYÖRFFI ÁDÁM GYÖRGY	6	MAGYARORSZÁG	7	10	4	8	10	2	41,00	I	I
2	ÁRVA NORBERT - ÁKOS	6	ROMÁNIA	10	2	4	7	10	6	39,00	I	II
3	PAPÁN ATTILA	6	FELVIDÉK	4	8	10	9	1	1	33,00	II	III
4	PÉTER ÁKOS	6	ROMÁNIA	2	2	10	10	1	3	28,00	III	D
5	FEHÉR KONRÁD	6	SZERBIA	7	6	4	7	2	1	27,00	III	D
6	BORVÁK ANNAMÁRIA	6	FELVIDÉK	3	7	2	10	1	3	26,00	III	D
7	SÜLI ÁKOS	6	SZERBIA	8	8	1	6	1	1	25,00	III	D
8	ACZÉL-SZABÓ JÁNOS	6	MAGYARORSZÁG	3	3	1	8	8	1	24,00	D	
9	BUCESCU ANDREEA BLANKA	6	ROMÁNIA	10	2	1	7	2	2	24,00	D	
10	ROKALY KRISZTA	6	ROMÁNIA	3	5	2	10	1	3	24,00	D	
11	OROSZ KATALIN	6	ROMÁNIA	5	2	1	1	4	10	23,00	D	
12	VITALOS ÁGNES	6	FELVIDÉK	3	6	4	6	1	3	23,00	D	
13	DOHORÁK ESZTER	6	FELVIDÉK	3	1	10	6	1	1	22,00	D	



Diák neve	Oszt.	Ország	P1	P2	P3	P4	P5	P6		NMMV	Miniszteri díjak
14 LACZKÓ CSONGOR	6	ROMÁNIA	3	3	4	1	8	3	22,00	D	
15 TÖRÖK GERGŐ	6	MAGYARORSZÁG	2	4	1	6	2	7	22,00	D	
16 VARGA CSILLA	6	FELVIDÉK	1	8	2	8	1	2	22,00	D	
17 MÉSZÁR ANNA ORSOLYA	6	ROMÁNIA	2	1	4	6	1	6	20,00	D	
18 TÓTH NOÉMI	6	SZERBIA	2	1	1	5	1	10	20,00	D	
19 ANDÓ VIOLA	6	MAGYARORSZÁG	2	1	10	2	2	2	19,00		
20 GALGÓCZY GÁBOR	6	MAGYARORSZÁG	9	2	1	5	1	1	19,00		
21 PÁLL LÁSZLÓ	6	KÁRPÁTALJA	9	2	1	5	1	1	19,00		
22 BOGNÁR EMESE	6	SZERBIA	2	1	2	7	2	3	17,00		
23 KOVÁCS MIHÁLY	6	MAGYARORSZÁG	2	3	1	8	1	2	17,00		
24 TAKÁCS BALÁZS	6	MAGYARORSZÁG	2	3	1	5	3	3	17,00		
25 MÜLLER ÁGNES	6	ROMÁNIA	1	4	4	4	1	2	16,00		
26 OSZTÉNYI JÓZSEF	6	MAGYARORSZÁG	2	6	1	5	1	1	16,00		
27 AMBRUS ZSOMBOR	6	MAGYARORSZÁG	3	2	1	6	1	2	15,00		
28 CSIKÓS RÉKA	6	SZERBIA	2	4	1	5	1	2	15,00		
29 HORVÁTH NORBERT	6	FELVIDÉK	3	3	1	5	1	2	15,00		
30 SÁPI CSABA	6	MAGYARORSZÁG	1	2	3	5	1	3	15,00		
31 BIRÓ ÁDÁM MÁRK	6	MAGYARORSZÁG	2	2	1	6	1	2	14,00		
32 KOVÁCS PÉTER	6	ROMÁNIA	3	2	1	5	1	2	14,00		
33 TÓTH TAMÁS	6	SZERBIA	2	2	1	5	1	3	14,00		
34 CSÓTI BALÁZS	6	MAGYARORSZÁG	2	1	4	4	1	1	13,00		
35 MÁTRAHÁZI KRISZTIÁN	6	MAGYARORSZÁG	1	1	1	8	1	1	13,00		
36 NÁSKÓ GYÖRGY MILÁN	6	KÁRPÁTALJA	1	1	4	5	1	1	13,00		
37 SZABÓ KRISZTIÁN	6	FELVIDÉK	2	1	1	6	1	2	13,00		
38 UDVAROS ANNA	6	FELVIDÉK	2	2	4	1	1	3	13,00		
39 NÉMETH ANDRÁS	6	FELVIDÉK	2	1	1	5	1	2	12,00		
40 JAKAB BÉLA	6	FELVIDÉK	1	2	1	5	1	1	11,00		
41 MOLNÁR DÁVID	6	SZERBIA	1	1	1	5	1	2	11,00		
42 TÓTH DÁVID	6	KÁRPÁTALJA	1	1	1	1	1	1	6,00		
43 TÓTH HAJNAL	6	KÁRPÁTALJA									
1 ROTH APOR	7	ROMÁNIA	5	7,5	12	10	7	9	50,50	I	I
2 MIKLÓS CSENGE	7	ROMÁNIA	10	8,5	10	1,5	7,5	10	47,50	I	II
3 HUGYIK KORNÉL	7	SZERBIA	10	2	10	10	3,5	8	43,50	II	III
4 KRISTÓ ROLAND	7	ROMÁNIA	6	4,5	10	4	7	9	40,50	II	D
5 BOROS CSABA	7	ROMÁNIA	8	3,5	10	1,5	7	9	39,00	II	D
6 PINKE ANDREA	7	FELVIDÉK	10	2,5	10	3	6,5	7	39,00	II	D
7 EGRI CSONGOR	7	ROMÁNIA	10	4,5	10	1,5	5	3	34,00	III	D
8 BÁRCZI ENIKŐ ANNA	7	MAGYARORSZÁG	10	2,5	10	3	3,5	4,5	33,50	III	
9 ESPÁN MÁRTON	7	MAGYARORSZÁG	10	1	8	10	2	2	33,00	III	
10 SZABÓ DÓRA-RENÁTA	7	ROMÁNIA	8	2,5	10	1,5	5	5	32,00	III	
11 NAGY DOROTTYA	7	MAGYARORSZÁG	9	3,5	3	10	2	4	31,50	III	
12 ANTAL RÉKA	7	MAGYARORSZÁG	4	3,5	7	10	2	3,5	30,00	D	
13 GARAMVÖLGYI ISTVÁN	7	MAGYARORSZÁG	10	3	10	2	2	3	30,00	D	
14 PULBERE DÁVID	7	ROMÁNIA	6	5,5	6	1,5	7	4	30,00	D	



Diák neve	Oszt.	Ország	P1	P2	P3	P4	P5	P6		NMMV	Miniszteri díjak
15 REM SOMA	7	MAGYARORSZÁG	6	2	6	9	2,5	4	29,50	D	
16 APAGYI DÁVID	7	MAGYARORSZÁG	8	3,5	8	2	3	4,5	29,00	D	
17 FARKAS BORÓKA	7	MAGYARORSZÁG	3	2	10	9	2	3	29,00	D	
18 JÓZSA KRISZTA	7	ROMÁNIA	9	2,5	10	3	2	2,5	29,00	D	
19 JÁNOSDEÁK MÁRK	7	FELVIDÉK	4	2	6	10	2,5	4	28,50	D	
20 BESNYI LEVENTE	7	SZERBIA	6	2	7	8	2	3	28,00	D	
21 KOZMÉR BARBARA	7	FELVIDÉK	6	2,5	10	4	2	3,5	28,00	D	
22 FODOR ORSOLYA SZILVIA	7	ROMÁNIA	6	2,5	10	1,5	3,5	3	26,50		
23 BERTA CSABA ZSOLT	7	MAGYARORSZÁG	10	1	10	1	2,5	1	25,50		
24 KATONA ÁRON	7	MAGYARORSZÁG	5	3,5	10	2,5	2	2	25,00		
25 SZIRTES BOTOND	7	MAGYARORSZÁG	6	2	3	10	1	3	25,00		
26 FABER SOMA BENEDEK	7	FELVIDÉK	6	4,5	7	3	2	2	24,50		
27 DURDÍK ÁGOSTON	7	FELVIDÉK	6	1	2	10	2,5	2	23,50		
28 SZEMERÉDI ELŐD	7	MAGYARORSZÁG	6	2	4	5	2	3	22,00		
29 OLTMAN TAMÁS	7	FELVIDÉK	4	1	1	9,5	2	2	19,50		
30 ZABOS PÉTER	7	SZERBIA	4	1	1	10	2	1	19,00		
31 KÖNIG BERTALAN	7	MAGYARORSZÁG	3	2	4	3	3	3,5	18,50		
32 KURUCZ GYULA	7	FELVIDÉK	5	1	4	6	1	1	18,00		
33 JAKAB LÓRÁND	7	ROMÁNIA	4	2	6	2	2	1,5	17,50		
34 SOÓS SZABOLCS	7	KÁRPÁTALJA	5	1	6	3	1	1,5	17,50		
35 KIS KÁROLY	7	MAGYARORSZÁG	5	2	3	3	2	1,5	16,50		
36 LENKEY GÁBOR	7	FELVIDÉK	3	1	1	6	2	2,5	15,50		
37 GERGELY ORSOLYA	7	FELVIDÉK	2	1,5	3	2,5	2,5	3	14,50		
38 KÖRÖSI ZALÁN	7	SZERBIA	2	2	3	3	2	2	14,00		
39 BÓZSÓ SZINTIA	7	SZERBIA	1	1	1	5	1	3	12,00		
40 BOR SÁNDOR	7	MAGYARORSZÁG	2	1	3	3	1	1,5	11,50		
41 SZABÓ LÁSZLÓ	7	MAGYARORSZÁG	2	2	2	2	1	1	10,00		
42 HAPÁK VIKTOR	7	KÁRPÁTALJA	1	1	3	2	1	1	9,00		
43 VASKEBA LÁSZLÓ	7	KÁRPÁTALJA	2	1	2	1	1	1	8,00		
44 BAGÚ ÁDÁM	7	KÁRPÁTALJA									
1 FAZAKAS BORBÁLA	8	ROMÁNIA	10	10	10	10	9	12	61,00	I	I
2 TAMÁS NÁNDOR-KÁROLY	8	ROMÁNIA	10	10	9,5	10	10	11	60,50	I	II
3 GARFIELD ADRIENNE	8	ROMÁNIA	10	10	10	10	10	10	60,00	I	III
4 SZÖGI ROLAND	8	SZERBIA	10	10	10	10	10	6	56,00	II	D
5 PORTIK ÁBEL	8	ROMÁNIA	13	10	10	9,5	10	1	53,50	II	D
6 MIKULÁS ZSÓFIA	8	MAGYARORSZÁG	10	10	10	3	10	10	53,00	II	D
7 PÉTER ISTVÁN	8	ROMÁNIA	10	10	9,5	9,5	8	6	53,00	II	D
8 BINDICS BOLDIZSÁR	8	MAGYARORSZÁG	6	10	10	8	10	7	51,00	III	D
9 SALÁNKI MIKLÓS	8	ROMÁNIA	10	10	9,5	10	10	1	50,50	III	
10 TÓTH JENŐ	8	MAGYARORSZÁG	5	10	6,5	6	10	10	47,50	III	
11 KURUNCZI VIKTORIA	8	ROMÁNIA	10	10	4	10	10	3	47,00	III	
12 BUKOR BENEDEK	8	FELVIDÉK	9	9	10	2,5	10	3	43,50	III	
13 EKE MÁTÉ	8	FELVIDÉK	6	10	10	3,5	10	1	40,50	III	
14 MELCHER MÁRK	8	MAGYARORSZÁG	10	10	4	5	8	1	38,00	D	



Diák neve	Oszt.	Ország	P1	P2	P3	P4	P5	P6	NMMV	Miniszteri díjak
15 APRÓ JÁNOS	8	SZERBIA	10	10	8	1	7	1	37,00	D
16 KISS PÉTER	8	MAGYARORSZÁG	10	10	6	5	5	1	37,00	D
17 TÁLOS ZOLTÁN	8	MAGYARORSZÁG	6	10	9,5	1	9	1	36,50	D
18 MARKÓ ANNA ERZSÉBET	8	FELVIDÉK	10	10	4	1	10	1	36,00	D
19 PELOK BALÁZS-ISTVÁN	8	ROMÁNIA	9	10	4	1,5	9	2	35,50	D
20 SULÁN ÁDÁM	8	MAGYARORSZÁG	5	9	4	10	4	1	33,00	D
21 FERENCZ DÁNIEL	8	ROMÁNIA	1	10	5	5,5	9	1	31,50	D
22 TÓTH PÉTER	8	SZERBIA	2	10	1	1	7	10	31,00	D
23 KERESZTES BEÁTA	8	ROMÁNIA	5	10	4,5	8	2	1	30,50	D
24 CSEPREGHY RÉKA SAROLTA	8	MAGYARORSZÁG	10	10	1	1	6	1	29,00	
25 DÜRGŐ VIRÁG	8	MAGYARORSZÁG	8	9	1	1	9	1	29,00	
26 SUKOLA GERGELY	8	FELVIDÉK	2	7	10	1	8	1	29,00	
27 KLUCKA VIVIEN	8	FELVIDÉK	1	10	4	5,5	7	1	28,50	
28 PINKE JAKAB ZOLTÁN	8	FELVIDÉK	3	10	1	1	10	1	26,00	
29 SZITTYAI JÚLIA	8	MAGYARORSZÁG	4	8	1	1	10	2	26,00	
30 SZTAREK NORBERT	8	SZERBIA	4	10	4	2,5	4	1	25,50	
31 ANDRÁSSY TAMÁS	8	MAGYARORSZÁG	2	10	1	1	10	1	25,00	
32 MATULA ÁRPÁD	8	MAGYARORSZÁG	2	10	1	1	10	1	25,00	
33 ZSOLDOS ZSUZSANNA KARINA	8	KÁRPÁTALJA	5	10	4	1	4	1	25,00	
34 SCHUPLER BENDEGÚZ	8	MAGYARORSZÁG	1	10	1	1	8	2	23,00	
35 TÓBIÁS ANNA	8	MAGYARORSZÁG	2	10	1	7	2	1	23,00	
36 RÚZSA ÁKOS	8	SZERBIA	4	10	4	1	2	1	22,00	
37 KUKORICÁS BENEDEK	8	FELVIDÉK	1	10	1	1,5	7	1	21,50	
38 FARKAS NORBERT	8	MAGYARORSZÁG	1	4	4	1	10	1	21,00	
39 GÉCSE ANGÉLA	8	KÁRPÁTALJA	4	10	4	1	1	1	21,00	
40 VLASZOV ARTÚR	8	MAGYARORSZÁG	5	10	1,5	1	2	1	20,50	
41 DARCSI BARBARA	8	KÁRPÁTALJA	1	9	4	1	2	3	20,00	
42 BACHMANN LAURA ADRIENNE	8	MAGYARORSZÁG	1	6	1	1	3	1	13,00	
43 ÁDÁM LEVENTE	8	MAGYARORSZÁG	2	6	1	1	1	1	12,00	
44 HORVÁTH KRISZTOFER ZOLTÁN	8	KÁRPÁTALJA								



Felkészítő pedagógusok



Sorszám	Név	Évf.	Intézmény neve, település	Felkészítő neve
1	Apró Dorottya	5	Jovan Mikity Általános Iskola, Szabadka, Szerbia	Petrás Csilla, Apró Szilvia, Tóth Gabriella
2	Áros Csenger	5	Derecskei Bocskai István Ált. Isk. és AMI; Derecske; Hajdú-Bihar	Fogarasiné Tamási Piroska
3	Back István Levente	5	Csiky Gergely Fogimnázium, Arad, Arad	Spier Tünde
4	Balogh Zsanett	5	Nagyasszonyunk Katolikus Általános Iskola; Kalocsa; Bács-Kiskun	Rumi Zsolt
5	Bene Zoltán	5	Derecskei Bocskai István Ált. Isk. és AMI; Derecske; Hajdú-Bihar	Fogarasiné Tamási Piroska
6	Berszán Örs	5	2-es Számú Általános Iskola, Brassó, Brassó	Balázs Anna
7	Boda Edina	5	Simion Barnutiu Általános Iskola, Zilah, Szilág	Faluvégi Melánia
8	Bonta Renáta Britta	5	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár, Kolozs megye	Nagy Örs
9	Borcsik Zsanett	5	Beregszászi 4. sz. Kossuth Lajos Középiskola, Beregszász, Kárpátalja	Nagy Zsuzsanna
10	Csaplár Viktor	5	Selye János Gimnázium, Révkomárom	Horváth Fél Szilvia, Horváth Katalin
11	Éles Júlia	5	Kölcsey Ferenc Fogimnázium, Szatmárnémeti, Szatmár	Forgács István
12	Ferencz Orsolya	5	Batthyány Lajos Gimnázium; Nagykanizsa; Zala	Tolnainé Horváth Ágnes
13	Gerenyi Gergő	5	Márai Sándor Gimnázium és Alapiskola, Kassa	Lejko Edit
14	Hapák Alexandra	5	Beregszászi Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja	Balácsi Borbála
15	KAISER DÁNIEL	5	BACZKAMADARASI KIS GERGELY REFORMÁTUS KOLLÉGIUM, SZÉKELYUDVARHELY, HARGITA MEGYE	SZÁSZ-TIKOSI ZOLTÁN
16	Kis Anita	5	BOLYAI FARKAS ELMÉLETI LICEUM, Marosvásárhely, Maros megye	Horváth Éva
17	Koleszár Domonkos	5	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc; Borsod-Abaúj-Zemplén	Takács Zoltán
18	Korponay Albert	5	Németh László Elméleti Liceum; Nagybánya; Máramaros	Mastan Eliza
19	Kotró Előd	5	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely, Kovászna megye	Tóth Zsuzsanna
20	Kovács Alex	5	Petőfi Brigád Általános Iskola, Kúla, Szerbia	Tóth Gabriella
21	Kovács Álmos	5	Gaál Mózes Általános Iskola, Barót, Kovászna	Süketes János
22	Kovács Rita	5	Szentkirályi Általános Iskola; Szentkirály; Bács-Kiskun	Gyimesi Réka
23	Kun A. Édua Boróka	5	Lorántffy Zsuzsanna Református Gimnázium, Nagyvárad, Bihar	Kovács Clara
24	Lelovics Gergely	5	Kodály Zoltán Gimnázium, Galánta	Szentandrás Ilona



Sorszám	Név	Évf.	Intézmény neve, település	Felkészítő neve
25	Révész Máté	5	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc; Borsod-Abaúj-Zemplén	Takács Zoltán
26	Sinkovics Alex	5	Hunyadi János Általános Iskola, Csantavér, Szerbia	Leonov Vörös Adriana, Sinkovics Csilla, Tóth Gabriella
27	Szabó Eszter	5	Kecskeméti Református Általános Iskola; Kecskemét; Bács-Kiskun	Nagy Tibor
28	Szekeres Alex	5	Kodály Zoltán Gimnázium, Galánta	Szentandrás Ilona
29	Szilágyi Botond	5	BOLYAI FARKAS ELMÉLETI LICEUM, Marosvásárhely, Maros megye	Horváth Éva
30	Szilágyi Vanda	5	Tiszakeresztúri Általános Iskola, Keresztúr, Kárpátalja	Héder Éva
31	Vargay András Dávid	5	Fényi Gyula Jezsuita Gimnázium és Koll.; Miskolc; Borsod-Abaúj-Zemplén	Tóth Tibor
32	Aczél-Szabó János	6	Kecskeméti Református Általános Iskola; Kecskemét; Bács-Kiskun	Nagy Tibor, Brenyó Mihály
33	Ambrus Zsombor	6	Miskolci Herman Ottó Gimnázium, Miskolc	Pilz Nagylaki Tünde
34	Andó Viola	6	SZTE Ságvári Endre Gyakorló Általános Iskola; Szeged; Csongrád	Molnár László
35	Árva Norbert - Ákos	6	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad, Bihar	Ridi Enikő
36	Biró Ádám Márk	6	Mezőtúri Ált. Isk. Kossuth Lajos Magyar-Angol KTNy ÁI.; Szolnok; Jász-Nagykun-Szolnok	Biróné Dragán Eniko
37	Bognár Emese	6	Miroslav Antity Általános Iskola, Palics, Szerbia	Lábadi Kornélia, Petrás Csilla
38	Borvák Annamária	6	Selye János Gimnázium, Révkomárom	Lami Zsuzsanna
39	Bucescu Andreea Blanka	6	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó, Brassó	Fülöp Edith
40	Csikós Réka	6	Miroslav Antity Általános Iskola, Palics, Szerbia	Lábadi Kornélia, Petrás Csilla
41	Csóti Balázs	6	SZTE Ságvári Endre Gyakorló Általános Iskola; Szeged; Csongrád	Vincze Istvánné
42	Dohorák Eszter	6	Vámbery Ármán Gimnázium, Dunaszerdahely	Salma Erzsébet
43	Fehér Konrád	6	Jovan Mikity Általános Iskola, Szabadka, Szerbia	Petrás Csilla
44	Galgóczy Gábor	6	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc; Borsod-Abaúj-Zemplén	Pilzné Nagylaki Tünde
45	Györffy Ádám György	6	Szepsi Csombor Márton Gimnázium; Szikszó; Borsod-Abaúj-Zemplén	Györffiné Puskás Tímea
46	Horváth Norbert	6	Kodály Zoltán Gimnázium, Galánta	Szentandrás Ilona
47	Jakab Béla	6	Munka Utcai Alapiskola, Révkomárom	Mázik Zsuzsa
48	Kovács Mihály	6	Derecskei Bocskai István Ált. Isk. és AMI; Derecske; Hajdú-Bihar	Fogarasiné Tamási Piroska
49	Kovács Péter	6	Simion Barnutiu Általános Iskola, Zilah, Szilágy	Faluvégi Melánia



Sorszám	Név	Évf.	Intézmény neve, település	Felkészítő neve
50	Laczkó Csongor	6	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy, Kovászna megye	Deák Éva
51	Mátraházi Krisztián	6	Fényi Gyula Jezsuita Gimnázium és Koll.; Miskolc; Borsod-Abaúj-Zemplén	Mozgó Endréné
52	Mészár Anna Orsolya	6	Csiky Gergely Fogimnázium, Arad, Arad	Spier Tünde
53	Molnár Dávid	6	Kizúr István Általános Iskola, Szabadka, Szerbia	Pintér Adél, Petrás Csilla
54	Müller Ágnes	6	Andrei Muresanu Fogimnázium, Beszterce, Beszterce - Naszód	Fodor Erika
55	Náskó György Milán	6	Beregszászi Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja	Balázsi Borbála
56	Németh András	6	Marianum Egyházi Iskolaközpont, Révkomárom	Simon Márta
57	Orosz Katalin	6	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár, Temes.	Pacurar Maria
58	Osztényi József	6	Kecskeméti Református Általános Iskola; Kecskemét; Bács-Kiskun	Nagy Tibor, Brenyó Mihály
59	Páll László	6	Beregrákosi Általános Iskola	Páll László
60	Papán Attila	6	Márai Sándor Gimnázium és Alapiskola, Kassa	Lejko Edit
61	Péter Ákos	6	Kiss Ferenc Általános Iskola, Csíkmadaras	Császár Sándor
62	Rokaly Kriszta	6	Fogarasy Mihály Általános Iskola, Gyergyószentmiklós, Hargita	Baricz Levente
63	Sápi Csaba	6	Derecskei Bocskai István Ált. Isk. és AMI; Derecske; Hajdú-Bihar	Fogarasiné Tamási Piroska
64	Süli Ákos	6	Széchenyi István Általános Iskola, Szabadka, Szerbia	Burány Zsuzsanna, Petrás Csilla
65	Szabó Krisztián	6	Deáki Alapiskola, Deáki	Jónás Gábor
66	Takács Balázs	6	Bonifert Domonkos Általános Iskola; Szeged; Csongrád	Szalaiiné Szunyi Klára
67	Török Gergő	6	Tisza-parti Általános Iskola; Szeged; Csongrád	Sántáné Prjevara Ágnes
68	Tóth Dávid	6	Beregszászi Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja	Balázsi Borbála
69	Tóth Hajnal	6	Beregszászi Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja	Balázsi Borbála
70	Tóth Noémi	6	Jovan Mikity Általános Iskola, Szabadka, Szerbia	Petrás Csilla
71	Tóth Tamás	6	Hunyadi János Általános Iskola, Csantavér, Szerbia	Leonov Vörös Adriana, Tóth Gabriella, Petrás Csilla
72	Udvaros Anna	6	Deáki Alapiskola, Deáki	Jónás Gábor
73	Varga Csilla	6	Vámbery Ármán Gimnázium, Dunaszerdahely	Salma Erzsébet
74	Vitálos Ágnes	6	Selye János Gimnázium, Révkomárom	Lami Zsuzsanna
75	Antal Réka	7	Földes Ferenc Gimnázium; Miskolc; Borsod-Abaúj-Zemplén	Marosszéky Gábor, dr. Szabadfalviné



Sorszám	Név	Évf.	Intézmény neve, település	Felkészítő neve
				Kormányos Anikó
76	Apagyai Dávid	7	Kecskeméti Református Általános Iskola; Kecskemét; Bács-Kiskun	Háriné Kun Éva, Csordás Mihály
77	Bagú Ádám	7	Bátyúi Középiskola	Bajusz Erzsébet
78	Bárczi Enikő Anna	7	Földes Ferenc Gimnázium; Miskolc; Borsod-Abaúj-Zemplén	Marosszéky Gábor, dr. Szabadfalviné Kormányos Anikó
79	Berta Csaba Zsolt	7	Bonyhádi Petofi Sándor Evangélikus Gimn. és Koll.; Bonyhád; Tolna	Kimle Mária
80	Besnyi Levente	7	Jovan Jovanovity Zmaj Általános Iskola, Szabadka, Szerbia	Joszity Márta, Papp Horvát Erika
81	Bor Sándor	7	Bajai III. Béla Gimnázium; Baja; Bács-Kiskun	Steingátrné Molnár Mária
82	Boros Csaba	7	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti, Szatmár	Koczinger Éva
83	Bózsó Szintia	7	Miroslav Antity Általános Iskola, Palics, Szerbia	Lábadi Kornélia, Patócs Mária
84	Durdik Ágoston	7	Marianum Egyházi Iskolaközpont, Révkomárom	Balogh Claudia
85	Egri Csongor	7	Nagy Imre Általános Iskola, Csíkszereda, Hargita megye	Simon Ilona
86	Espán Márton	7	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc; Borsod-Abaúj-Zemplén	Gulyásné Nemes Katalin
87	Faber Soma Benedek	7	Márai Sándor Gimnázium és Alapiskola, Kassa	Lejko Edit
88	Farkas Boróka	7	Bonyhádi Petofi Sándor Evangélikus Gimn. és Koll.; Bonyhád; Tolna	Kimle Mária
89	Fodor Orsolya Szilvia	7	Téglás Gábor Elméleti Líceum, Déva, Hunyad megye	Orbán Iuliana Enikő
90	Garamvölgyi István	7	Katona József Gimnázium; Kecskemét; Bács-Kiskun	Dr. Nádzhaziné Borbola Éva, Csordás Mihály
91	Gergely Orsolya	7	Tornaljai Gimnázium, Tornalja	Vincze Norbert
92	Hapák Viktor	7	Beregszászi Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja	File-Kovács Erika
93	Hugyik Kornél	7	Testvériség-Egység Általános Iskola, Bajsa, Szerbia	Vince-Nagy Izabella
94	Jakab Lóránd	7	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár, Temes.	Szilveszter Ibolya
95	Jánosdeák Márk	7	Selye János Gimnázium, Révkomárom	dr. Édes Erzsébet
96	Józsa Kriszta	7	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó, Brassó	Fülöp Edith
97	Katona Áron	7	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc; Borsod-Abaúj-Zemplén	Gulyásné Nemes Katalin
98	Kis Károly	7	Hogyes Endre Gimnázium és Szki.; Hajdúszoboszló; Hajdú-Bihar	Deli Lajos
99	König Bertalan	7	Bajai III. Béla Gimnázium; Baja; Bács-Kiskun	Steingátrné Molnár Mária



Sorszám	Név	Évf.	Intézmény neve, település	Felkészítő neve
100	Kőrösi Zalán	7	November 11-e Általános Iskola, Zenta, Szerbia	Törteli Ágnes
101	Kozmér Barbara	7	Széchenyi István Alapiskola, Felsoszei	Molnár Beáta
102	Kristó Roland	7	Liviu Rebreanu Általános Iskola, Csíkszereda, Hargita megye	Dénes Margit
103	Kurucz Gyula	7	Deáki Alapiskola, Deáki	Bende Gabriella
104	Lenkey Gábor	7	Tornaljai Gimnázium, Tornalja	Vincze Norbert
105	Miklós Csenge	7	Székely Mikó Kollégium; Sepsiszentgyörgy; Kovászna	Gödri Judith
106	Nagy Dorottya	7	Bányai Júlia Gimnázium; Kecskemét; Bács-Kiskun	Varga József, Csordás Mihály
107	Oltman Tamás	7	Márai Sándor Gimnázium és Alapiskola, Kassa	Lejko Edit
108	Pinke Andrea	7	Selye János Gimnázium, Révkomárom	dr. Édes Erzsébet
109	Pulbere Dávid	7	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár, Kolozs megye	Vincze Ágnes
110	Rem Soma	7	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc; Borsod-Abaúj-Zemplén	Gulyásné Nemes Katalin
111	Roth Apor	7	Székely Mikó Kollégium; Sepsiszentgyörgy; Kovászna	Gödri Judith
112	Soós Szabolcs	7	Beregszászi Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja	File-Kovács Erika
113	Szabó Dóra-Renáta	7	BOLYAI FARKAS ELMÉLETI LICEUM, Marosvásárhely, Maros megye	Szilagyi Terez Emőke
114	Szabó László	7	Hogyes Endre Gimnázium és Szki.; Hajdúszoboszló; Hajdú-Bihar	Deli Lajos
115	Szemerédi Előd	7	Bonifert Domonkos Általános Iskola; Szeged; Csongrád	Szalaiiné Szunyi Klára
116	Szirtes Botond	7	Batthyány Lajos Gimnázium; Nagykanizsa; Zala	Tolnainé Horváth Ágnes
117	Vaskeba László	7	Beregszászi Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja	Hapák Katalin
118	Zabos Péter	7	November 11-e Általános Iskola, Zenta, Szerbia	Törteli Ágnes, Kócé Nándor
119	Ádám Levente	8	Kecskeméti Református Általános Iskola; Kecskemét; Bács-Kiskun	Nagy Tibor, Csordás Péter
120	Andrássy Tamás	8	Mezőtúri Ált. Isk. Kossuth Lajos Magyar-Angol KTNy ÁI.; Szolnok; Jász-Nagykun-Szolnok	Farkas Sándorné
121	Apró János	8	Október 10-e Általános Iskola, Szabadka, Szerbia	Apró Szilvia, Papp Horvát Erika
122	Bachmann Laura Adrienne	8	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc; Borsod-Abaúj-Zemplén	Kóródi Zoltán
123	Bindics Boldizsár	8	Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium; Szeged; Csongrád	Mike János
124	Bukor Benedek	8	Selye János Gimnázium, Révkomárom	dr. Bukor Emőke
125	Csepregy Réka Sarolta	8	Batthyány Lajos Gimnázium; Nagykanizsa; Zala	Erdős Gábor
126	Darcsi Barbara	8	Beregszászi Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja	Hapák Katalin



Sorszám	Név	Évf.	Intézmény neve, település	Felkészítő neve
127	Dürgo Virág	8	Derecskei Bocskai István Ált. Isk. és AMI; Derecske; Hajdú-Bihar	Fogarasiné Tamási Piroska
128	Eke Máté	8	Amade László Alapiskola, Bos	Miklós György
129	Farkas Norbert	8	Mezőtúri Ált. Isk. Kossuth Lajos Magyar-Angol KTNy ÁI.; Szolnok; Jász-Nagykun-Szolnok	Farkas Sándorné
130	Fazakas Borbála	8	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár, Kolozs megye	Szilágyi Judit
131	Ferencz Dániel	8	BOLYAI FARKAS ELMÉLETI LICEUM, Marosvásárhely, Maros megye	MÁTÉFI ISTVÁN
132	Garfield Adrienne	8	János Zsigmond Kollégium, Kolozsvár, Kolozs megye	Nyitrai Ioan
133	Gécse Angéla	8	Gyulai Általános Iskola	Hevesi Tibor, Gécse Sándor
134	Horváth Krisztofer Zoltán	8	Derceni Középiskola	Fodor Ilona
135	Keresztes Beáta	8	Simion Barnutiu Általános Iskola, Zilah, Szilágy	Faluvégi Melánia
136	Kiss Péter	8	Högyes Endre Gimnázium és Szki.; Hajdúszoboszló; Hajdú-Bihar	Dankó Sándor
137	Klucska Vivien	8	Munka Utcai Alapiskola, Révkomárom	Kosa Timea
138	Kukoricás Benedek	8	Márai Sándor Gimnázium és Alapiskola, Kassa	Lejko Edit
139	Kurunczi Viktoria	8	Csiky Gergely Fogimnázium, Arad, Arad	Spier Tünde
140	Markó Anna Erzsébet	8	Széchenyi István Alapiskola, Felsőszeli	Szabó Rozália
141	Matula Árpád	8	Kecskeméti Református Általános Iskola; Kecskemét; Bács-Kiskun	Nagy Tibor, Csordás Péter, Gyömbér Csaba
142	Melcher Márk	8	Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimn. és Koll.; Bonyhád; Tolna	Csötönyi Nóra
143	Mikulás Zsófia	8	Kodály Zoltán Ének-Zenei Ált. Isk. és Gimnázium; Kecskemét; Bács-Kiskun	Csordás Mihály, Csordás Péter
144	PELOK BALÁZS- ISTVÁN	8	BACZKAMADARASI KIS GERGELY REFORMÁTUS KOLLÉGIUM, SZÉKELYUDVARHELY, HARGITA MEGYE	SZÁSZ-TIKOSI ZOLTÁN
145	Péter István	8	Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda, Hargita	Simon József
146	Pinke Jakab Zoltán	8	Perbetei Alapiskola	Schiller Veronika
147	Portik Ábel	8	S. Illyés Lajos Általános Iskola; Szováta; Maros megye	Madaras Beáta Enikő
148	Rúzsza Ákos	8	November 11-e Általános Iskola, Zenta, Szerbia	Törteli Ágnes
149	Salánki Miklós	8	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad, Bihar	Gál Ildikó
150	Schupler Bendegúz	8	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc; Borsod-Abaúj-Zemplén	Kóródi Zoltán
151	Sukola Gergely	8	Perbetei Alapiskola	Schiller Veronika



Sorszám	Név	Évf.	Intézmény neve, település	Felkészítő neve
152	Sulán Ádám	8	Batthyány Lajos Gimnázium; Nagykanizsa; Zala	Erdős Gábor
153	Szittyai Júlia	8	Tarjáni Kéttannyelvű Általános Iskola; Szeged; Csongrád	Földeák Imréné
154	Szögi Roland	8	Kis Ferenc Általános Iskola, Orom, Szerbia	Erdélyi Henrietta, Papp Horvát Erika
155	Sztarek Norbert	8	Október 10-e Általános Iskola, Szabadka, Szerbia	Apró Szilvia, Papp Horvát Erika
156	Tálos Zoltán	8	Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimn. és Koll.; Bonyhád; Tolna	Csötönyi Nóra
157	Tamás Nándor-Károly	8	Kelemen Didák Általános Iskola, Kézdialmás, Kovászna	Tamás Enikő
158	Tóbiás Anna	8	Református Kollégium Szilády Áron Gimnáziuma; Kiskunhalas; Bács-Kiskun	Bíró Emőke
159	Tóth Jenő	8	Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium; Szeged; Csongrád	Mike János
160	Tóth Péter	8	Ady Endre Kísérleti Általános Iskola, Kishegyes, Szerbia	Magyar Tibor
161	Vlaszov Artur	8	Beregszászi Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja	Csordás Péter
162	Zsoldos Zsuzsanna Karina	8	Beregszászi Bethlen Gábor Magyar Gimnázium, Beregszász, Kárpátalja	Hapák Katalin



Feladatok román nyelvű fordításai



Clasa 5. (6.)

Subiectul 1.

Determinați toate numere naturale n diferite de 0 de o cifră, pe care dacă le înmulțim cu 38, după care înmulțim produsul obținut cu 76 și adunăm la rezultat 7, obținem un număr care are ultima cifră 9.

Szabó Magda, Subotica

Rezolvare: Dacă din rezultatul final scădem 7, atunci obținem un număr cu ultima cifră 2. Acest număr este $38 \cdot 76 \cdot n$, în care ultima cifră a produsului $38 \cdot 76$ este 8. Deoarece $4 \cdot 8 = 32$ și $9 \cdot 8 = 72$, valoarea lui n poate fi 4 sau 9.

Subiectul 2.

Să aranjăm numerele 2, 3, 5, 11, 13, 19, 31, 53 și 61 în grupe de câte trei, astfel încât produsul numerelor din grupele alcătuite să fie numere naturale consecutive!

Kovács Béla, Satu Mare

Rezolvare: Prima dată alcătuim trei grupe, luând numerele în ordine crescătoare (2, 3, 5), (11, 13, 19), (31, 53, 61), după care din fiecare grupă alegem un număr.

Dacă din prima grupă alegem numărul 2, atunci avem două posibilități de a alege câte un număr din celelalte grupe:

alegem 2, 13 și 61, produsul lor va fi $2 \cdot 13 \cdot 61 = 1586$

sau alegem 2, 19 și 53, produsul lor va fi $2 \cdot 19 \cdot 53 = 2014$.

După acesta dacă din prima grupă alegem numărul 3 vom avea următoarele posibilități:

3, 11, 61, produsul lor va fi $3 \cdot 11 \cdot 61 = 2013$ sau

3, 19, 31, produsul lor va fi $3 \cdot 19 \cdot 31 = 1767$.

În final din prima grupă alegem numărul 5, din celelalte grupe pe 13 respectiv pe 31, produsul lor va fi: $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015$.

În concluzie alcătuirea grupelor de numere conform cerințelor va fi:

3, 11, 61, produsul lor $3 \cdot 11 \cdot 61 = 2013$

2, 19, 53, produsul lor $2 \cdot 19 \cdot 53 = 2014$

5, 13, 31, produsul lor $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015$

Subiectul 3.

Se dă numărul natural $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2015} + 2^{2016}$.

e) Demonstrați că numărul A este divizibil cu 30.

f) Determinați numerele prime p și q știind că:

$$(2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2015} + 2^{2016}) : (1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{2012}) + p \cdot q = 2015.$$

Mátéfi István, Târgu Mureș

Rezolvare: a) $A = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^4 \cdot (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{2012} \cdot (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$,

deci $A = 30 \cdot (1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{2012})$, de unde obținem că $A : 30$.

b) Conform punctului a) avem $(2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2015} + 2^{2016}) : (1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{2012}) = 30$



Ecuția dată poate fi scrisă în forma $30 + p \cdot q = 2015$ de unde obținem că $p \cdot q = 1985$. Deci $p=5$ și $q=397$ sau invers: $q=5$ și $p=397$

Subiectul 4.

Determinați cifrele a, b și c pentru care are loc egalitatea:

$$(\overline{aaaa})^2 + (\overline{bbbb})^2 + (\overline{cccc})^2 = 12221^2.$$

Dr. Bencze Mihály, București

Rezolvare: $(\overline{aaaa})^2 + (\overline{bbbb})^2 + (\overline{cccc})^2 = a^2 \cdot 1111^2 + b^2 \cdot 1111^2 + c^2 \cdot 1111^2 = (11 \cdot 1111)^2$

deci $a^2 + b^2 + c^2 = 121$.

Fie $a \geq b \geq c$.

Dacă $a \leq 6$, $b \leq 6$ și $c \leq 6$, atunci $a^2 + b^2 + c^2 \leq 108$, deci acest caz nu are soluție.

Dacă $a = 7$, atunci $b^2 + c^2 = 72$, deci $b = c = 6$.

Dacă $a = 8$, atunci $b^2 + c^2 = 57$, deci nici acest caz nu are soluție.

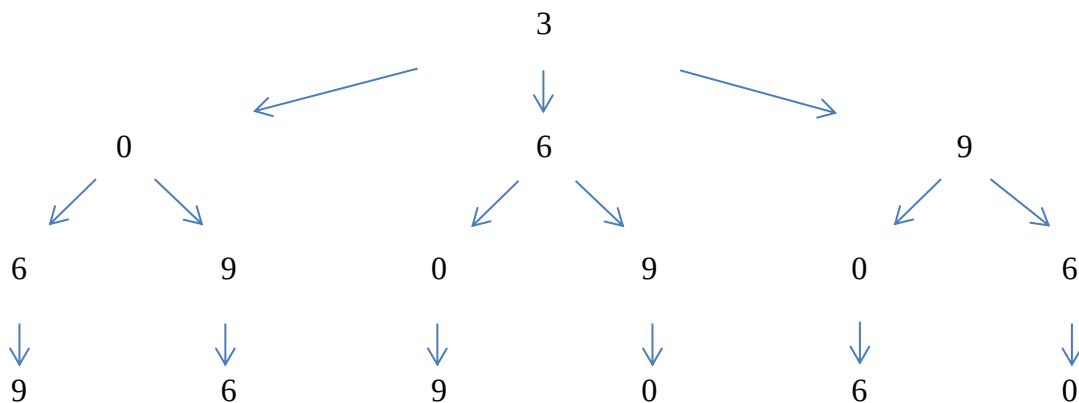
Dacă $a = 9$, atunci $b^2 + c^2 = 40$, deci $b = 6$ și $c = 2$.

Subiectul 5.

Câte numere naturale de n cifre ($n \geq 2$) sunt în sistemul zecimal, care au cifrele diferite și suma oricăror două cifre învecinate este divizibilă cu 3?

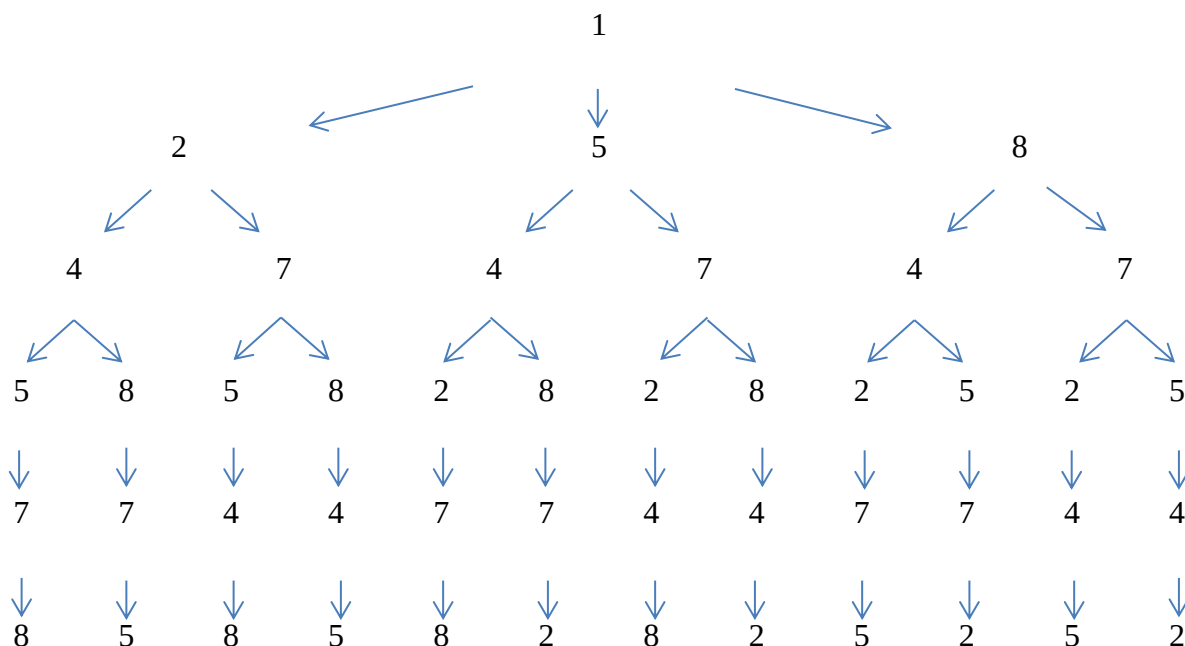
Gecse Frigyes, Kisvárd

Rezolvare: Dacă prima cifră este 3, atunci următoarele cifre sunt reprezentate în următoarea figură:



Putem observa din figura de mai sus că în cazul numerelor care încep cu 3, numere de două cifre avem 3 buc. (30, 36, 39), de trei cifre 6 buc. (306, 309, 360, 369, 390, 396), de patru cifre tot 6 buc. (3069, 3096, 3609, 3690, 3906, 3960), numere de mai mult decât patru cifre nu sunt. Avem situații asemănătoare în cazul în care prima cifră este 6 sau 9.

Dacă prima cifră a numărului este 1, 2, 4, 5, 7 sau 8, atunci în fiecare caz obținem aceeași număr de rezultate. În următoarea figură este reprezentată cazul în care prima cifră este 1:



Putem observa din figura de mai sus că în cazul numerelor care încep cu 1, numere de două cifre avem 3 buc., de trei cifre 6 buc., de patru, de cinci și de șase cifre câte 12 buc. Numere de mai mult decât șase cifre nu sunt. Avem încă 5 situații asemănătoare în cazul numerelor care încep cu 2, 4, 5, 7 sau 8.

Dacă $n \geq 2$ numărul numerelor căutate sunt:

valorile lui n	Numărul numerelor căutate
2	$6 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 27$
3	$6 \cdot 6 + 6 \cdot 3 = 54$
4	$6 \cdot 12 + 6 \cdot 3 = 90$
5	$6 \cdot 12 = 72$
6	$6 \cdot 12 = 72$
$n \geq 7$	0

Subiectul 6.

Balaurul, ca să-și salveze viața, i-a arătat lui Ion lada care conținea lingouri de aur și a spus: „Pune-ți în sac cel puțin un lingou. După aceasta voi lua înapoi în lada mea din sacul tău cel puțin un lingou, dar un număr diferit de cel luat de tine. Așa o să procedăm și în continuare: tu o să iei din lada mea, iar eu o să iau din sacul tău lingouri, dar de fiecare dată trebuie să luăm număr de bucăți diferite față de numărul lingourilor luate în cazurile precedente. În momentul în care nu mai putem continua mutarea cu această regulă stabilită, poți lua acasă toate lingourile existente la momentul respectiv în sacul tău.”

Cel mult câte buc. de lingouri a putut duce acasă Ion, dacă în ladă au fost inițial 10 buc., iar balaurul a făcut tot posibilul ca numărul acesta să fie cât mai mic?

*Nagy Baló András, Budapesta*

Rezolvare: Ion atunci poate „dirija” mutarea lingourilor, dacă balaurul de fiecare dată are doar o singură variantă de recuperare. Arătăm că Ion poate duce acasă cel mult 9 buc. de lingouri, dacă procedează astfel:

Prima dată Ion pune în sacul lui 2 lingouri, balaurul poate recupera doar o singură buc., rămânând astfel la Ion 1 buc. După aceasta Ion ia 3 buc. (în acest moment are în total 4 buc.), balaurul fiind nevoit să recupereze toate cele 4 buc. După aceasta Ion ia din ladă 6 buc., astfel balaurul trebuie să recupereze 5 buc. Urmează ca Ion să ia 7 buc., obligând balaurul să recupereze toate cele 8 buc. (rămân 0 buc. la Ion). La ultima mutare Ion ia 9 buc., lăsând balaurul fără drept de replică, deoarece toate numerele de la 1 la 9 au fost deja folosite la mutările precedente.

Și în tabelul de mai jos putem urmări etapele mutărilor:

mutare	a luat Ion	a recuperat balaurul	în sacul lui Ion	în lada balaurului
1.	2		2	8
2.		1	1	9
3.	3		4	6
4.		4	0	10
5.	6		6	4
6.		5	1	9
7.	7		8	2
8.		8	0	10
9.	9		9	1

În final ne putem da seama că Ion nu ar fi putut obține toate cele 10 lingouri. Ca să rămână la el toate cele 10 buc., acesta presupune ca la ultima mutare balaurul să nu mai aibă posibilitatea de a recupera nici o bucată de lingou. Acesta ar însemna că au fost efectuate deja 10 mutări, adică fiecare număr de la 1 la 10 a fost folosit deja în mutările precedente. Ion fiind cel care face prima mutare, balaurul este cel care face ultima. Indiferent câte bucăți recuperează balaurul la această ultimă mutare, Ion nu are cum să rămână cu toate cele 10 buc.

În consecință Ion poate obține cel mult 9 buc. de lingouri.

Traducere:

PATAKI Árpád
ORBÁN Ilona Kármén
HODGYAI Edit
ERDEI Sándor
Alin NOVAC-IUHAS



Clasa 6. (7.)

Subiectul 1.

Într-o grilă de 5×5 , în pătratul din colțul din stânga jos este așezat un purice. Poate sări doar în sus sau în dreapta, lungimea săriturii poate fi oricât de mare. În câte feluri poate ajunge în pătratul aflat în colțul din dreapta sus a grilei?

Horváth Katalin, Komárom

Rezolvare:

Pornind de fiecare dată din colțul respectiv și sărind de fiecare dată spre dreapta, pe al doilea pătrat aflat pe acest rând poate sări într-un singur fel, pe al treilea pătrat în două feluri: $1+1=2$, pe al patrulea pătrat în 4 feluri: $1+1+2=4$, iar pe ultimul pătrat aflat în colțul din dreapta jos a grilei poate sări în $1+1+2+4=8$ feluri. Aceeași lucruri este valabil și pentru prima coloană.

Dacă ne uităm de exemplu la al patrulea pătrat din stânga aflat pe al doilea rând de jos, avem: $4+1+2+5=12$ posibilități.

Pe pătratul aflat deasupra celui precedent, puricele poate sări de pe pătratele aflate în stânga sau în dedesubtul lui: $4 + 12 + 2 + 5 + 14 = 37$. Astfel putem completa grila alăturată conform căruia obținem că în 838 feluri poate ajunge puricele prin sărituri în pătratul din dreapta sus.

8	28	94	289	838
4	12	37	106	289
2	5	14	37	94
1	2	5	12	28
1	1	2	4	8

Subiectul 2.

În curtea școlii elevii sunt așezați pe un singur rând, unul lângă altul. Fiecare elev poartă căciulă de culoare roșie, albă sau albastră. Dintre oricare cinci elevi vecini exact unul singur poartă căciulă de culoare roșie și dintre oricare șapte elevi vecini exact unul singur poartă căciulă de culoare albă.

Determinați:

- Cel puțin câți elevi pot avea căciulă de culoare albastră?
- Cel mult câți elevi pot avea căciulă de culoare albastră?

Mátéfi István, Târgu Mureș

Rezolvare:

- Cel puțin șapte elevi trebuie să fie în rând. Dintre aceștia un singur elev are căciulă albă. Numărul elevilor care poartă căciulă albastră atunci va fi minim, când numărul elevilor cu căciulă roșie este maxim, adică 2 (dacă elevii 1. și 6. sau 2. și 7. au căciulă roșie). Deci numărul minim a elevilor cu căciulă albastră este $7 - 1 - 2 = 4$.
- Dintre oricare cinci elevi vecini unul singur poartă căciulă roșie, deci cel mult fiecare al cincilea elev are căciulă roșie. Deoarece dintre oricare șapte elevi vecini unul singur poartă căciulă de culoare albă, cel mult fiecare al șaptelea elev are căciulă albă. $(5, 7) = 1$ prin urmare cel mult 34 de elevi sunt în curtea școlii (de aceea nu pot fi 35, fiindcă atunci ultimul elev ar avea două căciuli, una roșie



și una albă). Din 34 de elevi cel puțin 6 au căciulă roșie și cel puțin 4 au căciulă albă. Deci cel mult $34 - (6 + 4) = 24$ elevi pot avea căciulă albastră.

Subiectul 3.

Micul Prinț, stând pe planeta lui, se uită cu plăcere la cerul înstelat. Anul acesta a studiat cometa *Vagabond* și a observat că din cauza pierderilor din masa totală perioada de reîntoarcere crește permanent. A găsit înregistrări scrise despre cometă, care a revenit și anul acesta: prima dată a fost văzută în anul 5 era noastră, după care a revenit în anul 65. A calculat faptul că va reveni cel mai curând peste 137020 de ani. Determinați regula de orbită a cometei!

Pálhegyi-Farkas László, Oradea

Rezolvare:

Trebuie observat faptul că $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ și faptul că primii trei ani sunt: 5, $5 \cdot 13 = 65$ și $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015$. Pe de altă parte peste 137020 ani vom fi în anul 139035, care se poate scrie sub forma $139035 = 5 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 69$.

Deci dacă aflăm regula de alcătuire a șirului 5, 13, 31, 69, atunci am rezolvat problema. Regula fiind:

$$n=1, \quad 5$$

$$n=2, \quad 13 = 2 \cdot 5 + 3$$

$$n=3, \quad 31 = 2 \cdot 13 + 5$$

$$n=4, \quad 69 = 2 \cdot 31 + 7$$

Adică dublăm valoarea precedentă (excepție la prima valoare) și adunăm la rezultat următorul număr impar (începem cu 3).

Observație: evident șirul poate fi continuat până la infinit.

**Subiectul 4.**

Într-un campionat de fotbal echipele *Picioare de aur*, *Golgheterii*, *Fulgerii* și *Picioare de plumb* au jucat fiecare cu fiecare câte un singur meci. În final a fost publicat următorul tabel:

Loc	Numele echipei	Numărul meciurilor			Număr de goluri	
		câștigate	remize	pierdute	marcate	primite
1.	Picioarele de aur	2	1	0	4	1
2.	Golgheterii	2	0	1	4	1
3.	Fulgerii	0	2	1	1	2
4.	Picioarele de plumb	0	1	2	0	5

Care sunt rezultatele meciurilor jucate?

Nagy Baló András, Budapesta

Prima soluție:

Golgheterii au suferit o singură înfrângere și au primit un singur gol, de aceea scorul meciului pierdut a fost de 1 : 0 în favoarea adversarilor. Fulgerii și Picioarele de plumb nu au câștigat nici un meci, astfel **Picioarele de aur** au fost cei care au bătut **Golgheterii** cu scorul de **1 : 0**.

Picioarele de plumb nu au marcat nici un gol și au făcut o remiză, astfel meciul respectiv sa terminat cu 0 : 0. În cele două meciuri pierdute au primit în total 5 goluri. Deoarece Fulgerii nu au câștigat nici un meci, Picioarele de plumb au pierdut față cu Picioarele de aur și Golgheterii. Astfel rezultatul meciului **Fulgerii – Picioarele de plumb** a fost **0 : 0**.

Singurul gol primit de către Golgheteri provine de la Picioarele de aur, astfel singurul gol marcat de către Fulgeri a fost încasat de către Picioarele de aur. Deoarece Fulgerii au obținut 2 remize iar Golgheterii nu au jucat nici o remiză, meciul Fulgerii – Picioarele de aur, meci în care Fulgerii au marcat 1 gol, sa încheiat cu remiză. Astfel rezultatul meciului: **Fulgerii – Picioarele de aur** a fost **1 : 1**.

Celălalt gol primit de către Fulgeri poate fi doar de la Golgheteri (Picioarele de plumb nu au marcat nici un gol). Astfel scorul meciului **Golgheterii – Fulgerii** a fost **1 : 0**.

Golgheterii până acum în cele două meciuri au 1 gol primit și 1 marcat, golaverajul lor fiind 4 : 1. Astfel în al treilea meci, jucat împotriva Picioarelor de plumb, au câștigat cu scorul de 3 : 0. Deci **Golgheterii-Picioarele de plumb** sa terminat cu rezultatul de **3 : 0**.

În consecință din cele 5 goluri primite ale Picioarelor de plumb 2 au fost încasate de la Picioarele de aur. Deci **Picioarele de aur- Picioarele de plumb** 2 : 0.

A doua soluție:



Asemănător cu soluția precedentă, rezultă imediat că **Picioarele de aur** au bătut **Golgheterii** cu scorul de **1 : 0** și **Fulgerii** au remizat cu **Picioarele de plumb** cu scorul de **0 : 0**.

Reconstituim tabelul inițial (nu luăm în considerare locul ocupat):

Loc	Numele echipei	Numărul meciurilor			Număr de goluri	
		câștigate	remize	pierdute	marcate	primite
	Picioarele de aur	2	1	0	4	1
	Golgheterii	2	0	1	4	1
	Fulgerii	0	2	1	1	2
	Picioarele de plumb	0	1	2	0	5

Notăm rezultatele meciurilor în felul următor:

Picioarele de aur - Fulgerii $x : x$ (singurul meci remiză)

Golgheterii – Picioarele de plumb $y : 0$ (deoarece Picioarele de plumb nu au marcat gol)

Picioarele de aur - Picioarele de plumb $u : 0$ (deoarece Picioarele de plumb nu au marcat gol)

Golgheterii – Fulgerii $t : p$

Conform golurilor primite și marcate putem scrie următoarele relații:

$$\begin{cases} x + u = 3 \\ y + t = 4 \\ x + p = 1 \\ x + t = 2 \\ y + u = 5 \end{cases} \text{ deoarece Fulgerii au marcat un singur gol, } x = 1 \text{ și obținem imediat că } p = 0, u = 2, t = 1, y = 3. \text{ Deci rezultatele meciurilor sunt:}$$

Picioarele de aur - Fulgerii $1 : 1$

Golgheterii – Picioarele de plumb $3 : 0$

Subiectul 5.

Într-un triunghi dreptunghic înălțimea, dusă din vârful unghiului drept pe ipotenuză, formează cu

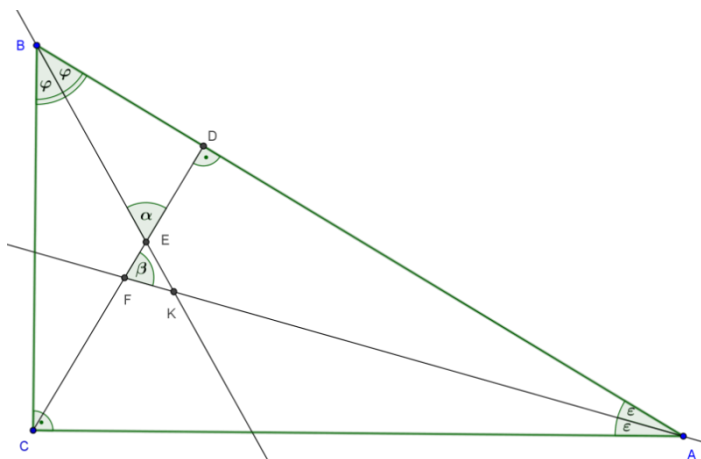
bisectoarele unghiurilor ascuțite unghiurile α și β , astfel încât $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{5}$. Calculați măsura unghiurilor ascuțite!

Bíró Bálint, Eger

Prima soluție:



Construim figura conform cerințelor problemei, notând cu K intersecția bisectoarelor, adică centrul cercului înscris în triunghi



Suma măsurilor unghiurilor ascuțite din triunghiul ABC este $2\varepsilon + 2\varphi = 90^\circ$, de unde obținem $\varepsilon + \varphi = 45^\circ$, respectiv $m(\widehat{AKB}) = 135^\circ$ și

$$(1) \quad m(\widehat{EKF}) = 45^\circ.$$

Unghiurile opuse la vârf fiind congruente, de aceea $m(\widehat{FEK}) = \alpha$. În triunghiul FEK , pe baza rezultatului de la pct. (1), avem:

$$(2) \quad \alpha + \beta + 45^\circ = 180^\circ.$$

$$\text{adică } \alpha + \beta = 135^\circ.$$

Deoarece $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{5}$, din care $\alpha = \frac{4}{5}\beta$. Înlocuim în relația (2): $\frac{4}{5}\beta + \beta = 135^\circ$ și obținem

$$(3) \quad \beta = 75^\circ \text{ și } \alpha = 60^\circ.$$

În triunghiul BED $\alpha + \varphi = 90^\circ$, de aici obținem $\varphi = 30^\circ$. Pe baza relației $\varepsilon + \varphi = 45^\circ$ obținem imediat $\varepsilon = 15^\circ$. Deci în triunghiul ABC măsura unghiurilor ascuțite vor fi $2\varepsilon = 30^\circ$ respectiv $2\varphi = 60^\circ$.

A doua soluție:

Folosind notațiile din figura precedentă în triunghiul ADF $m(\widehat{FAD}) = 90^\circ - \beta$ și în triunghiul BED . $m(\widehat{EBD}) = 90^\circ - \alpha$. Deoarece AF și BE sunt bisectoare, rezultă:

$$2 \cdot (90^\circ - \beta) + 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 90^\circ. \text{ De aici rezultă că } \alpha + \beta = 135^\circ.$$

Din proporția $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{5}$ derivăm următoarea: $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{9}{5}$. De aici rezultă imediat că $\alpha = 60^\circ$ și $\beta = 75^\circ$.



Subiectul 6.

În triunghiul ABC $AB = AC$ și măsura unghiului B este de 80° . Pe latura AB luăm un punct D astfel încât $AD = BC$. Pe segmentul AD construim triunghiul echilateral ADE în exteriorul, dar tot în planul triunghiului ABC .

Demonstrați, că : a) semidreapta $[CD$ este bisectoarea unghiului ACE !

b) triunghiul EMB este isoscel, unde M este intersecția segmentelor EC și AB !

Koczinger Éva, Satu Mare

Prima soluție:

Să privim figura alăturată:

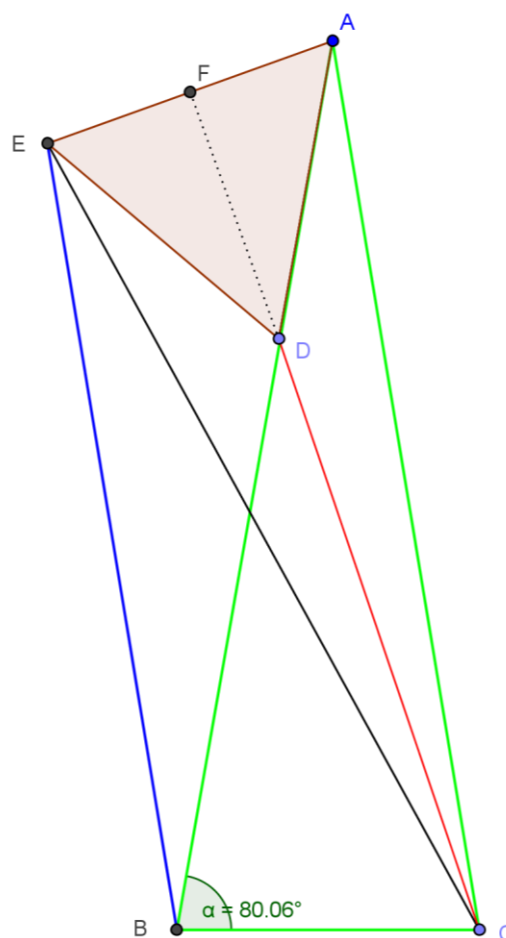
a) Din datele problemei rezultă că $m(\widehat{BAC}) = 20^\circ$. Mai departe avem $\triangle CAE \equiv \triangle ABC$ deoarece

$$\begin{cases} EA = BC & \text{consecință ipoteză} \\ CA = AB & \text{ipoteză} \end{cases} \quad (\text{L.U.L}).$$

$$m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{ABC}) = 80^\circ$$

Deci $\triangle CAE$ este isoscel și $\triangle ADE$ este echilateral, de aceea $\triangle CDE \equiv \triangle CDA \Rightarrow \widehat{DCE} \equiv \widehat{DCA}$. Prin urmare semidreapta $[CD$ este bisectoarea unghiului ACE .

b) Deoarece $\triangle CAE \equiv \triangle ABC \Rightarrow m(\widehat{ACM}) = 20^\circ \Rightarrow \triangle AMC$ este isoscel $\Rightarrow AM = MC$ și $AB = EC$, de aceea $EM = MB \Rightarrow \triangle EMB$ este isoscel.



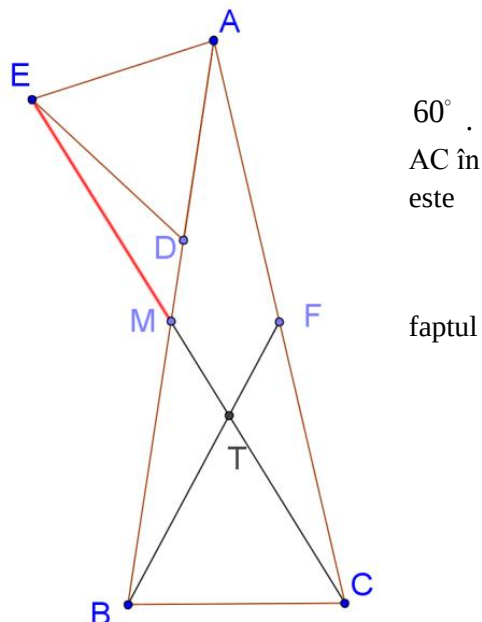
**A doua soluție:**

a) În triunghiul echilateral ADE înălțimea dusă din vârful D este și mediană. Avem $\triangle CAE \equiv \triangle ABC$, (L.U.L), rezultă că $\triangle CAE$ este isoscel. În acest triunghi mediana dusă din vârful C este totodată și înălțime, și bisectoare. Deoarece în mijlocul laturii AE se poate ridica o singură perpendiculară, rezultă că: mijlocul laturii AE , punctul D și respectiv punctul C sunt coliniare.

Deci semidreapta $[CD$ este bisectoare.

b) Să privim următoarea figură:

Efectuăm o construcție ajutătoare, prin vârfurile B respectiv C ducem două semidrepte, care alcătuiesc cu latura BC unghiuri de 60° . Aceste semidrepte se intersectează în punctul T , iar laturile AB și AC în punctele G respectiv F . Din construcție rezultă că triunghiul BTC echilateral și congruent cu triunghiul EAD . Deoarece $m(\widehat{TC A}) = m(\widehat{AC E}) = 20^\circ$, rezultă că punctele C , T și E sunt coliniare, deci punctele G și M coincid. Luând în considerare aceste lucruri și că unghiurile $\widehat{EMD}$ și $\widehat{BMT}$ sunt opuse la vârf, rezultă că triunghiurile MBT și MED sunt congruente, deci $EM = MB$.

**Traducere:**

PATAKI Árpád
ORBÁN Ilona Kármén
HODGYAI Edit
ERDEI Sándor
Alin NOVAC-IUHAS

**Clasa 7. (8.)****Subiectul 1.**

100 de nuci au fost împărțite între copii, astfel: primul copil a primit câteva bucăți, al doilea cu una mai mult ca primul, al treilea cu una mai mult decât al doilea și așa mai departe. Fiecare copil a primit o nucă în plus față de copilul anterior. La câți copii au fost împărțite nucile și câte nuci a primit fiecare copil?

Szabó Magda, Szabadka

Rezolvare:**Soluția I**

Notăm cu x numărul nucilor primit de primul copil.

Numărul copiilor	1	2	3	4	5	6	7
100 nuci	x	$2x+1$	$3x+3$	$4x+6$	$5x+10$	$6x+15$	$7x+21$
Numărul copiilor	8	9	10	11	12	13	14
100 nuci	$8x+28$	$9x+36$	$10x+45$	$11x+55$	$12x+78$	$13x+91$	$14x+105$

Dintre aceștia numai $5x + 10 = 100$ și $8x + 28 = 100$ corespunde cerințelor. În restul cazurilor rezultatul ecuațiilor nu este număr natural, $x=1$ nu corespunde cerințelor.

În primul caz $x=18 \Rightarrow (100-10):18=5$ între cinci copii au fost împărțite nucile astfel încât copii au primit 18, 19, 20, 21, respectiv 22 nuci.

În cazul al doilea $x=9 \Rightarrow (100-28):9=8$ între opt copii au fost împărțite, și au primit 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, respectiv 16 nuci.

Soluția II

Dacă notăm cu x numărul nucilor primit de primul copil, atunci al doilea copil a primit $x+1$ nuci, al treilea $x+2$ nuci, ..., al n -lea copil $x+n-1$ nuci.

Putem scrie ecuația astfel: $x + x+1 + x+2 + \dots + x+n-1 = 100 \Rightarrow n \cdot x + (1+2+3+\dots+n-1) = 100$
 $\Rightarrow$

$$n \cdot x + \frac{(n-1) \cdot n}{2} = 100 \quad | \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 2nx + (n-1) \cdot n = 200 \quad \Rightarrow \quad n \cdot (2x+n-1) = 2^3 \cdot 5^2 \quad \Rightarrow$$

$$n \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100\}.$$

După verificarea cazurilor rezultă că avem următoarele soluții:

$$n=5 \Rightarrow x=18$$

$$n=8 \Rightarrow x=9.$$

**Subiectul 2.**

Fie paralelogramul $ABCD$. Pe laturile paralelogramului, în același plan, construim în exterior triunghiurile echilaterale ABE , BCF , CDG și DAH .

- Demonstrați că patrulaterul $EFGH$ este paralelogram.
- Demonstrați că centrele paralelogramelor $EFGH$ și $ABCD$ coincid.
- Ca patrulaterul $EFGH$ să fie dreptunghi ce tip de paralelogram trebuie să fie $ABCD$?

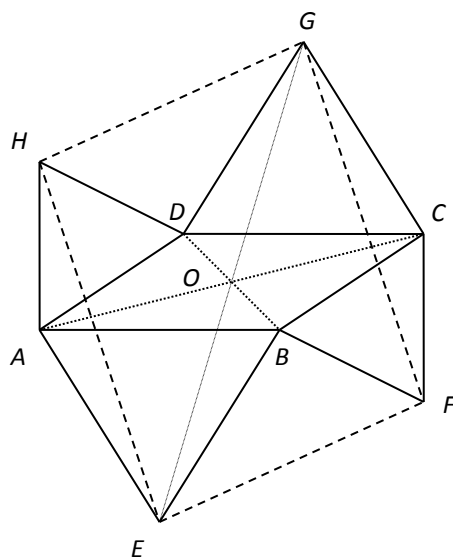
Simon József, Miercurea Ciuc

Rezolvare:**Soluția I**

- Avem $\triangle HAE \cong \triangle FCG$, pentru că $[HA] \cong [FC]$, $[AE] \cong [GC]$ și $\angle HAE \cong \angle FCG$ (cazul l.u.l.) $\Rightarrow [HE] \cong [GF]$. (1) De asemenea $\triangle HDG \cong \triangle FBE$, pentru că $[HD] \cong [FB]$, $[GD] \cong [BE]$ și $\angle HDG \cong \angle FBE \Rightarrow [HG] \cong [EF]$. (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă că patrulaterul $EFGH$ este paralelogram.

- Fie O centrul paralelogramului $ABCD$: $AC \cap BD = \{O\}$. Trebuie să demonstrăm mijlocul diagonalei $[EG]$ al paralelogramului $EFGH$ coincide cu punctul O . $m(\angle GDC) = m(\angle ABE) = 60^\circ$
 $DC \parallel AB \Rightarrow [GD] \parallel [BE]$ și $[GD] \cong [BE] \Rightarrow GDEB$ este paralelogram $\Rightarrow$ diagonalele $[GE]$ și $[DB]$ se intersectează în punctul O , așadar centrele celor două paralelograme coincid.



este

și

Soluția II

- Deoarece $\angle HDB \cong \angle DBF$ (unghiuri alterne-interne) și $[HD] \cong [BF] \Rightarrow HDBF$ paralelogram $\Rightarrow$ diagonalele $[HF]$ și $[DB]$ se înjumătățesc, deci $HF \cap DB = \{O\}$. (1)

Deoarece $\angle GDO \cong \angle OBE$ (unghiuri alterne-interne) și $[GD] \cong [BE] \Rightarrow GDEB$ paralelogram $\Rightarrow$ și diagonalele $[GE]$ și $[DB]$ se înjumătățesc $\Rightarrow O \in GE$. (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă că segmentele $[HF]$ și $[GE]$ se înjumătățesc $\Rightarrow$ patrulaterul $EFGH$ este paralelogram.

- Deoarece O este mijlocul diagonalelor $[EG]$ și $[BD]$, astfel este și centrul celor două paralelograme, rezultă că centrele paralelogramelor coincid.

În ambele cazuri avem:

- Dacă $ABCD$ este romb, atunci $[HD] \cong [GD]$, $[DO] \cong [DO]$ și $\angle HDO \cong \angle GDO \Rightarrow \triangle HDO \cong \triangle GDO \Rightarrow [HO] \cong [GO] \Rightarrow [HF] \cong [GE] \Rightarrow$ patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi.

**Subiectul 3.**

Determinați cifrele a , b și c pentru care are loc următoarele relații:

$$\begin{cases} \overline{aa} \cdot \overline{ab} = \overline{bb} \cdot \overline{ba} \\ \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 999 \end{cases}$$

dr. Bencze Mihály, București

Rezolvare:

Din prima egalitate rezultă că:

$$\overline{aa} \cdot \overline{ab} = \overline{bb} \cdot \overline{ba} \Leftrightarrow 11a \cdot (10a + b) = 11b \cdot (10b + a) \Leftrightarrow 110a^2 = 110b^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Din egalitatea a doua rezultă:

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111 \cdot (a + b + c) = 111 \cdot (2a + c) = 999.$$

De aici rezultă $2a + c = 9$.

Cazul I: $c = 1 \Rightarrow a = b = 4$;

Cazul II: $c = 3 \Rightarrow a = b = 3$;

Cazul III: $c = 5 \Rightarrow a = b = 2$;

Cazul IV: $c = 7 \Rightarrow a = b = 1$.

Subiectul 4.

Determinați toate perechile de numere de trei cifre, care au diferența 100 dintre care unul este divizibil cu 6 și celălalt număr este divizibil cu 7.

Róka Sándor, Nyíregyháza

Rezolvare:

Dacă numărul mai mic este divizibil cu 6, iar numărul mai mare este divizibil cu 7, atunci numerele 600 și 700 sunt o astfel de pereche. Celelalte perechi se obțin, dacă careva din multipli comuni ai lui 6 și 7, adică un multiplu al lui 42, se scade sau se adună la aceste numere.

Astfel obținem următoarele perechi de numere care satisfac cerințele: (138, 238), (180, 280), (222, 322), (264, 364), ..., (894, 994). În total avem 19 perechi de numere.

Dacă numărul mai mic este divizibil cu 7, iar numărul mai mare este divizibil cu 6, atunci perechea 602 și 702 este corespunzătoare. Pe principiul menționat mai sus obținem perechile: (140, 240), (182, 282), (224, 324), (266, 366), ..., (896, 996). Obținem la fel 19 perechi de numere.

În total avem $19 + 19 = 38$ perechi de numere care corespund cerințelor.



Subiectul 5.

În trapezul $ABCD$ $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$ și $AB = 2 \cdot DC$. Punctele E și F împart latura BC în trei părți egale: $BE = EF = FC$. Știind, că $AF \cap DE = \{O\}$. Demonstrați, că:

- $A_{AEF} = 2 \cdot A_{DEF}$;
- $A_{AEF} = \frac{2}{9} \cdot A_{ABCD}$;
- $A_{OEF} = \frac{1}{27} \cdot A_{ABCD}$!

Rezolvare:

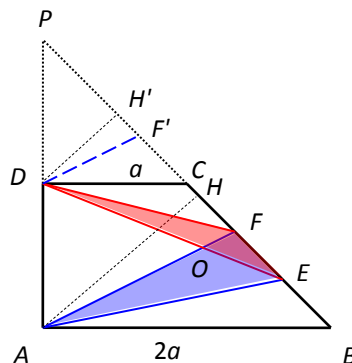
a) Fie $DC = a \Rightarrow AB = 2a$. Prelungirea laturilor AD și BC se intersectează în punctul P . Fie:

$AH \perp BP$ și $DH' \perp BP \Rightarrow AH \parallel DH'$. ($H, H' \in BP$)

$DC = \frac{AB}{2} \Rightarrow DC$ este linie mijlocie a triunghiului $PAB \Rightarrow$

$AD = DP$. De aici rezultă că DH' este linie mijlocie în triunghiul PAH , deci rezultă că $AH = 2 \cdot DH'$.

$$A_{AEF} = \frac{EF \cdot AH}{2} \text{ și } A_{DEF} = \frac{EF \cdot DH'}{2} \Rightarrow A_{AEF} = 2 \cdot A_{DEF}.$$



b) Înălțimile triunghiurilor AEF și ABC coincid, $EF = \frac{1}{3}BC \Rightarrow A_{AEF} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC}$ (1)

În triunghiurile ABC și ADC , $AB = 2 \cdot DC$, înălțimea AD coincide, rezultă că $\frac{A_{ABC}}{A_{ACD}} = \frac{2}{1}$. Prin

proporții derivate rezultă că $\frac{A_{ABC}}{A_{ABCD}} = \frac{2}{3} \Rightarrow A_{ABC} = \frac{2}{3} A_{ABCD}$ (2) Din relațiile (1) și (2) obținem că

$$A_{AEF} = \frac{2}{9} \cdot A_{ABCD};$$

c) Fie $DF' \parallel AF \Rightarrow DF'$ este linia mijlocie a triunghiului $PAF \Rightarrow \frac{DF'}{AF} = \frac{1}{2}$ (3) și $PF' = F'F$, dar

$$PF = \frac{4}{6}PB \Rightarrow F'F = \frac{2}{6}PB, \text{ dar } CF = \frac{1}{6}PB \Rightarrow F'C = CF.$$

În triunghiul EDF' , $OF \parallel DF'$, din teorema fundamentală a asemănării rezultă că $\frac{OF}{DF'} = \frac{EF}{EF'} = \frac{1}{3}$. (4)

După înmulțirea membrilor egalităților (3) și (4) obținem $\frac{OF}{AF} = \frac{1}{6} \Rightarrow T_{OEF} = \frac{1}{6} T_{AEF}$, pe baza

subpunctului b) $A_{OEF} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9} A_{ABCD} \Rightarrow A_{OEF} = \frac{1}{27} \cdot A_{ABCD}$



Subiectul 6.

Determinați toate numerele prime p , diferite de 3 pentru care valoarea fracției $\left| \frac{p^2 + 19}{p - 3} \right|$ este tot un număr prim!

Bíró Bálint, Eger

Rezolvare:

Transformăm fracția astfel:

$$\frac{p^2 + 19}{p - 3} = \frac{p^2 - 9 + 28}{p - 3} = \frac{p^2 - 9}{p - 3} + \frac{28}{p - 3} = p + 3 + \frac{28}{p - 3}.$$

Fracția este un număr întreg, dacă $p - 3$ este divizorul numărului 28.

Obținem deci $p - 3 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28\} \Rightarrow p \in \{4, 2, 5, 1, 7, -1, 10, -4, 17, -11, 31, -25\}$

Ținând cont că p este număr prim, obținem că $p \in \{2, 5, 7, 17, 31\}$.

Rezultă că avem două soluții: $p \in \{2, 7\}$.

Traducere:

PATAKI Árpád
ORBÁN Ilona Kármén
HODGYAI Edit
ERDEI Sándor
Alin NOVAC-IUHAS



Clasa a 8.-a (a 9.-a)

Subiectul 1.

Arătați că numărul $n^{2015} - n^{2011}$ este divizibil cu 30, pentru orice n număr natural!

Polcz Zita, Satu Mare

Rezolvare:

Notăm cu $A = n^{2015} - n^{2011}$.

Demonstrăm, că A este divizibil cu 2, 3, 5 și pentru că $(2, 3, 5) = 1$, rezultă că

$A : 30$.

Dacă $n = 0$ și $n = 1$, atunci $A = 0$, deci este divizibil cu 30.

Dacă $n > 1$ atunci $A = n^{2010}n(n^4 - 1) = n^{2010}n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$.

$n(n - 1)$ este divizibil cu 2, $(n - 1)n(n + 1)$ este divizibil cu 3. Dacă n este divizibil cu 5, atunci și A este divizibil cu 5.

Dacă n nu este divizibil cu 5, atunci:

$n = 5k + 1 \Rightarrow (n - 1) : 5 \Rightarrow A : 5$ sau

$n = 5k + 2 \Rightarrow n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 5 \cdot (5k^2 + 4k + 1) : 5 \Rightarrow A : 5$ sau

$n = 5k + 3 \Rightarrow n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 5 \cdot (5k^2 + 6k + 2) : 5 \Rightarrow A : 5$ sau

$n = 5k + 4 \Rightarrow (n + 1) : 5 \Rightarrow A : 5$.

Subiectul 2.

Din vârfurile unui pătrat cu aria de 256 cm^2 tăiem patru triunghiuri dreptunghice isoscele congruente. Perimetrul octogonului astfel obținut este egal cu suma perimetrelor celor patru triunghiuri tăiate. Calculați perimetrul și aria octogonului!

Tóth Gabriella, Palics

Rezolvare:

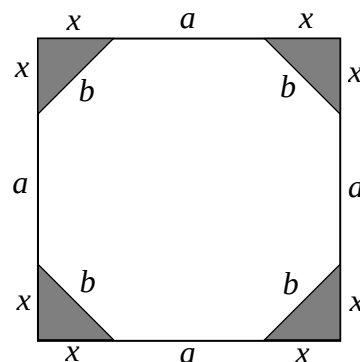
Latura pătratului este de 16 cm. Deoarece perimetrul octogonului este egal cu suma perimetrelor celor patru triunghiuri tăiate, rezultă că

$$4a + 4b = 4b + 4 \cdot 2x$$

$$4a = 8x$$

$$a = 2x$$

$$a + 2x = 16$$





$$4x = 16$$

$$x = 4 \text{ cm și } a = 8 \text{ cm}$$

Aplicând teorema lui Pitagora obținem $b = 4\sqrt{2} \text{ cm}$.

Perimetrul octogonului:

$$P = 4a + 4b = 16(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}.$$

Aria octogonului:

$$A = 256 - 4 \cdot \frac{x^2}{2} = 224 \text{ cm}^2.$$

Subiectul 3.

Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, demonstrați că are loc următoarea identitate algebrică:

$$(a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (-a + b + c)^2 + (a + b + c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

b) Demonstrați că, expresia $2014^{2014} + 2016^{2016} + 2018^{2018}$ se poate exprima ca o sumă de patru pătrate de numere reale diferite!

dr. Bencze Mihály, București

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a) } (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (-a + b + c)^2 + (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - \\ &- 2bc + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc + a^2 + b^2 + c^2 + \\ &+ 2ab + 2ac + 2bc = 4(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

$$\text{b) } 2014^{2014} + 2016^{2016} + 2018^{2018} =$$

$$= 4[(2^{1006} \cdot 1007^{1007})^2 + (2^{1007} \cdot 1008^{1008})^2 + (2^{1008} \cdot 1009^{1009})^2].$$

$$\text{Fie } x = 2^{1006} \cdot 1007^{1007}, y = 2^{1007} \cdot 1008^{1008} \text{ și } z = 2^{1008} \cdot 1009^{1009}.$$

Astfel $2014^{2014} + 2016^{2016} + 2018^{2018} = 4(x^2 + y^2 + z^2)$. Folosind relația din punctul a) obținem:

$$\begin{aligned} 2014^{2014} + 2016^{2016} + 2018^{2018} &= \\ &= (x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 + (-x + y + z)^2 + (x + y + z)^2. \end{aligned}$$

Subiectul 4.

Fie patrulaterul convex $ABCD$, în care $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ sunt unghiuri complementare. Arătați că:

$$\text{e) } AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2;$$

f) În planul patrulaterului $ABCD$, perpendicularele duse din punctul D pe latura AD și din punctul C pe latura BC sunt perpendiculare între ele!

Oláh Miklós, Crasna

**Rezolvare:**

a) Fie $AD \cap BC = \{E\}$. Deoarece $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$ sunt unghiuri complementare rezultă că AEB este triunghi dreptunghic, deci EAB_{Δ} , EDC_{Δ} , EAC_{Δ} și EDB_{Δ} sunt triunghiuri dreptunghice.

Aplicând teorema lui Pitagora:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2, \quad (1)$$

$$CD^2 = DE^2 + EC^2, \quad (2)$$

$$AC^2 = AE^2 + EC^2, \quad (3)$$

$$BD^2 = DE^2 + BE^2. \quad (4)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow AB^2 + CD^2 = AE^2 + BE^2 + DE^2 + EC^2$$

$$(3) + (4) \Rightarrow AC^2 + BD^2 = AE^2 + EC^2 + DE^2 + BE^2$$

$$\text{Deci } AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2.$$

b) Perpendicularele duse din punctul D pe latura AD și din punctul C pe latura BC se intersectează în punctul M , iar cu latura AB se intersectează în punctul P respectiv în punctul N , astfel obținem triunghiul MNP .

În triunghiul dreptunghic ADP unghiurile $\sphericalangle APD$ și $\sphericalangle A$ sunt complementare, de unde rezultă că $\sphericalangle NPM \equiv \sphericalangle B$. (1)

În triunghiul dreptunghic BCN unghiurile $\sphericalangle BNC$ și $\sphericalangle B$ sunt complementare, de unde rezultă că $\sphericalangle MNP \equiv \sphericalangle A$. (2)

Din relațiile (1) și (2)

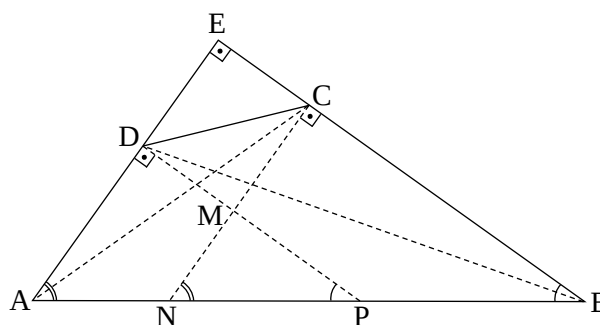
$$m(\sphericalangle N) + m(\sphericalangle P) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle M) = 90^\circ \Rightarrow DM \perp CM.$$

Observații:

1) Dacă folosim EDC_{Δ} obținut cu construcția ajutătoare, atunci demonstrația este și mai ușoară pentru că în patrulaterul $EDMC$

$$m(\sphericalangle E) = m(\sphericalangle D) = m(\sphericalangle C) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle M) = 90^\circ.$$

2) Demonstrația este asemănătoare și atunci când punctul de intersecție M este pe latura AB sau în exteriorul patrulaterului.

**Subiectul 5.**

Din 27 de zaruri construim prin lipire un cub, și din cinci fețe al cubului ales aleator scoatem zarul din mijloc. Care este numărul minim al punctelor existente pe suprafața corpului geometric? (Pe fețele zarului sunt puncte de la 1 la 6, și pe fețele opuse suma punctelor este 7)

Csordás Mihály, Kecskemét

Rezolvare:

După ce scoatem cele 5 zaruri, rămân 22 de zaruri în cubul construit.



Dintre ele 8 sunt la cele 8 vârfuri ale cubului. La suprafața cubului construit, din zarurile respective se văd trei fețe învecinate, deci rezultă că numărul minim de puncte pe suprafața acestora va fi $8 \cdot (1 + 2 + 3) = 48$

Pe toate cele 12 muchii ale cubului se află câte un zar, dintre care nici unul nu se află în vârful cubului. Dintre aceștia la 8 se văd numai 2-2 laturi opuse pe suprafața corpului.

Pe cele două fețe opuse suma punctelor este 7, de unde rezultă că suma punctelor este de $8 \cdot (7 + 7) = 112$.

La celelalte 4 cuburi se văd două fețe opuse și una alăturată, pe care numărul minim al punctelor este de $4 \cdot (1 + 7) = 32$.

Dintre cele două zaruri rămase unul este mijlocul unei fețe din cubul construit. La aceasta se vede o față, drept pentru care, pe suprafața acestui zar numărul minim de puncte este 1. Zarul celălalt se află la mijlocul cubului. La acest zar sunt vizibile cinci fețe, astfel rezultă că suma minimă a punctelor este $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Astfel suma minimă a punctelor pe fețele cubului este $48 + 112 + 32 + 1 + 15 = 208$.

Subiectul 6.

Lui Koppány îi place ciocolata. Ca să nu mănânce prea mult, mama sa ascunde ciocolatele într-un seif. Seiful are o cheie care se poate învârti la stânga sau la dreapta și un ecran. Sistemului de închidere funcționează în felul următor:

Pe ecran apare un număr natural k , variabil, care corespunde unui alt număr variabil de $n = 2^k$.

Dacă cheia se învârti la dreapta, atunci discul din interiorul sistemului de închidere face o rotație de $2 \cdot n$ astfel că valoarea lui k crește cu unu, dacă se învârti la stânga atunci face o rotație de $\frac{n}{2}$ și

valoarea lui k scade cu unu. Discul totdeauna are același sens de rotire. Seiful numai atunci se deschide dacă se învârti prima dată de k ori cheia la dreapta, până când valoarea lui k revine la valoarea inițială care a fost prima dată pe ecran, după care se învârti de k ori la stânga. Dacă se închide seiful valoarea lui k crește cu unu, față de valoarea lui k obținută la închiderea anterioară (numai sistemul de închidere poate modifica valoarea lui k).

Koppány a găsit descrierea funcționării seifului și a făcut rost de ciocolata mult dorită.

Ce valoare a fost afișată pe ecran, dacă știm că ultima dată discul a făcut a 2015 rotație ?

Câte rotații a avut discul la a treia deschidere ?

Pálhegyi-Farkas László, Oradea

Rezolvare:

Pentru $k = 1$ discul are un număr de $2^2 + 2^0 = 5$ rotații, după care seiful se deschide. La închidere valoarea lui k crește cu unu, va fi $k = 2$. La această valoare discul execută un număr de $2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 27$ rotiri.

Valoarea lui 2015 în sistemul binar este de $1111101111_{(2)}$, de unde rezultă că se poate scrie 2015 în felul următor:

$$2015 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

Adică la ultima deschidere valoarea lui k a fost 5. Într-adevăr dacă pornim de la valoarea lui $n = 2^5$ și învârtim cheia de 5 ori la dreapta, atunci discul pe rând face rotiri de $2^6, 2^7, 2^8, 2^9$ și 2^{10} , după



care valoarea lui k revine la valoarea inițială, la 5, și dacă învârtim cheia de cinci ori la stânga discul pe rând face următoarele rotiri 2^4 , 2^3 , 2^2 , 2^1 și 2^0 . În total obținem 2015 rotiri.

Putem observa că valoarea $k - 1$ înseamnă de câte ori a fost deschis până acum seiful, și valoarea k arată numărul următoarei deschidere. Astfel la a treia deschidere discul a avut

$$119 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 \text{ rotații.}$$

Traducere:

PATAKI Árpád

ORBÁN Ilona Kármén

HODGYAI Edit

ERDEI Sándor

Alin NOVAC-IUHAS



Bizottságok



Központi bizottság

Tétel és javítókulcs készítő albizottság

Név	Beosztás	Intézmény
dr. Kovács Lehel	Elnök	Sapientia egyetem, Marosvásárhely
Mátyás Emőke-Éva	Ügyvezető elnök	Tanügy Minisztérium, Bukarest
dr. Bencze Mihály	Alelnök	Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest
Zsigó Tamás	Titkár	Bihar megyei Tanfelügyelőség, Nagyvárad
Pálhegyi László	Tag	Mihai Eminescu Főgimnázium, Nagyvárad
Simon József	Tag	Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda
Mátéfi István	Tag	Bólyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Tomos Izabella	Tag	8-as Számú Általános Iskola, Brassó
Koczinger Éva	Tag	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum Szatmár
Păcurar Maria	Tag	Bartók Béla elméleti Líceum, Temesvár
Debrenti Attila	Tag	16-os sz. Általános Iskola, Nagyvárad
Mastan Eliza	Tag	Németh László Elméleti Líceum Nagybánya

Értékelő albizottság - javítótanárok

Név	Tanintézmény
Mastan Eliza	Németh László Elméleti Líceum Nagybánya
Pálhegyi-Farkas László	Mihai Eminescu Főgimnázium, Nagyvárad
Csordás Mihály	Kodály Zoltán Ének-Zenei Ált. Isk. és Gimn.
Juhász Nándor	Rókusi Általános Iskola, Szeged
Hapák Katalin	Beregszászi Bethlen Gábor Magyar Gimnázium
Erdős Gábor	Battyhány Lajos Gimnázium
Hodgyai Edit	Miskolczi Károly Általános Iskola, Micske
Tamás Enikő	Kelemen Didák I-VIII Osztályos Iskola, Almás
Koczinger Éva	Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum Szatmár
Mátéfi István	Bólyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Román István	Munkácsi 3.sz. II. Rákóczy Ferenc Középiskola
Veres Erika	Nagybereg Református Líceum
Mázik Zsuzsanna	Munka Utcai Alapiskola, Révkomárom
Petrás Csilla	Jovan Mikity Általános Iskola, Szabadka
Törteli Ágnes	November 11-e Általános Iskola, Zenta
Faluvégi Melánia	Șc. Gimnazială "Simion Bărnuțiu" Zalău
Păcurar Maria	Bartók Béla elméleti Líceum, Temesvár
Simon József	Petőfi Sándor Általános Iskola, Csíkszereda



Név	Tanintézmény
Liszakay Béla	Madács Imre Gimnázium Somorja
Csordáné Szécsi Jolán	Katona József Gimnázium
Udvaros József	Kodály Zoltán Gimnázium Galánta
Fogarasiné Tamási Piroska	Derecskei Bocskai István Általános Iskola
Bors Violetta	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Tomos Izabella	8-as Számú Általános Iskola, Brassó
Réman Ildikó	Andrei Mureșanu Főgimnázium, Beszterce
Egyed László	Bajai III. Béla Gimnázium
Tóth Gabriella	Miroslav Antic Általános Iskola Palics
Mikó István	Márai Sándor Gimnázium és Alapiskola

Szervező bizottság

Név	Beosztás	Tanintézmény
Kéry Hajnal	Elnök	Tanfelügyelőség, Nagyvárad
Zalder Éva	Alelnök	Szent László Római Katolikus Teológiai Líceum, Nagyvárad
Sele Tünde	Titkár	Tanfelügyelőség, Nagyvárad
Horea Abrudan	Tag	Tanfelügyelőség, Nagyvárad
Alin Novac-Iuhas	Tag	Tanfelügyelőség, Nagyvárad
Nan Gabriela	Tag	Tanfelügyelőség, Nagyvárad
Onita-Avram Adriana	Tag	Tanfelügyelőség, Nagyvárad
Haracsek Klementina	Tag	Szent László Római Katolikus Teológiai Líceum, Nagyvárad
Nagy Enikő	Tag	Szent László Római Katolikus Teológiai Líceum, Nagyvárad
István Zoltán	Tag	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Kovács Clara	Tag	Lorántffy Zsuzsanna Református Líceum, Nagyvárad
Zsíros Anikó	Tag	Lorántffy Zsuzsanna Református Líceum, Nagyvárad

Fordító tanárok

Név	Tanintézmény
Horea Abrudan	Bihar megyei Tanfelügyelőség, Nagyvárad
Alin Novac-Iuhas	Bihar megyei Tanfelügyelőség, Nagyvárad
Pataki Árpád	1.sz. Általános Iskola, Diószeg
Erdei sándor	Miskolczy Károly Általános Iskola, Micske
Hodgyai Edit	Miskolczy Károly Általános Iskola, Micske
Orbán Ilona	1.sz Szakképző Líceum, Berettyószéplak



Támogatást nyújtó tanárok

Név	Tanintézmény
Gál Ildikó	Lorántffy Zsuzsanna Református Líceum, Nagyvárad
Bódi Zsófia	16-os sz. Általános Iskola, Nagyvárad
Vasi Krisztina	Friedrich Schiller Német Líceum
Ridi Enikő	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Márton Katalin	Lorántffy Zsuzsanna Református Líceum, Nagyvárad
Tóth Monica Erika	Szent László Római Katolikus Teológiai Líceum, Nagyvárad
Gáll Anita	Szent László Római Katolikus Teológiai Líceum, Nagyvárad
Nagy István	Mihai Eminescu Főgimnázium, Nagyvárad
Babota Tünde	Szent László Római Katolikus Teológiai Líceum, Nagyvárad
Hasas Tünde	Szent László Római Katolikus Teológiai Líceum, Nagyvárad
Székely Melinda	Nagyvárad Állami Színház
Forgács Zsombor	Nagyvárad Néptánc Együttes
Kovács Abigél	Lorántffy Zsuzsanna Református Líceum, Nagyvárad
Dulău Diana	Szent László Római Katolikus Teológiai Líceum
Takács Zoltán	Lorántffy Zsuzsanna Református Líceum, Nagyvárad
Tiponuț Monica	Művészeti Líceum, Nagyvárad
Rácz Beáta	"Szacsvey Imre" Általános iskola, Nagyvárad



Támogató iskolák (anyagi és humán erőforrás)

Szent László Római Katolikus Teológiai Líceum

Érmihályfalvi 1. Számú Mezőgazdasági Főgimnázium

Kazinczi Ferencz Általános Iskola, Érsemlyén

Dr. Balasi József Általános Iskola, Érkörtlés

Értarcsai 1. Sz. Általános Iskola.

Tamási Áron Mezőgazdasági Főgimnázium, Bors

Paptamási 1. Számú Általános Iskola

Miskolczi Károly Általános Iskola, Micske

Lorántffy Zsuzsanna Református Líceum, Nagyváradi

Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyváradi

Művészeti Líceum, Nagyváradi



Támogatók:

Román Tanügy-Minisztérium
Bihar Megyei Tanfelügyelőség
Bihar Megyei Tanács
Nagyvárad Polgármesteri Hivatal
Bíró Rozália szenátorasszony
Szabó Ödön Parlamenti Képviselő
Huszár István alpolgármester
Szigligeti Színház Nagyvárad
Nagyvárad Állami Filharmónia
Nagyvárad Római Katolikus Püspökség
Mallersdorfi Ferences Nővérek
Bihar Megyei Turisztikai Információs Központ
Monthermal Travel Utazási Iroda
Nomad Archery Shop & Range Íjjász Szaküzlet
Hotel Nevis Nagyvárad
Techoprint
Erasport
Europrint
Zalder András
Jakabffy László
Erős István



Matematika tanárok által beküldött feladatok



1. feladat

Adottak $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $t \in (0,1)$. Igazold, hogy $|a| = |b| = |c|$ akkor és csakis akkor, ha

$$\max\left\{\sqrt{(1-t)a^2 + tb^2}; \sqrt{ta^2 + (1-t)b^2}\right\} = \max\{|a|, |b|\} \text{ és}$$

$$\min\left\{\sqrt{(1-t)b^2 + tc^2}; \sqrt{tb^2 + (1-t)c^2}\right\} = \min\{|b|, |c|\}$$

Dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest

2. feladat

1) Ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ akkor $(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (-a+b+c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$

2) Igazold, hogy $2014^{2014} + 2016^{2016} + 2018^{2018}$ felírható négy különböző szigorúan pozitív egész szám négyzeteinek összegeként

Dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest

3. feladat

Határozzátok meg azon $n \in \mathbb{N}^*$ számokat, amelyekre:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1^2 - 1}}} + \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2^2 - 1}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{m + \sqrt{m^2 - 1}}} = 4\sqrt{63}$$

Dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest

4. feladat

Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén 24^n felírható két különböző természetes szám négyzeteinek különbségeként.

Dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest

5. feladat

Ha $x, y, z, t \geq 0$ és $k \in \mathbb{N}$ akkor

$$xy(z^k - t^k)^2 + zt(x^k - y^k)^2 \geq (xz^k - yt^k)(yz^k - xt^k) + (zx^k - ty^k)(tx^k - zy^k)$$

Dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest

6. feladat

Ha $a, b, c > 0$ akkor

$$1) \quad (a^2 + 1) \cdot (b^2 + 1) = (ab - 1)^2 + (a + b)^2$$

$$2) \quad \frac{(a^2+1)-(b^2+1)}{a+b} + \frac{(b^2+1)-(c^2+1)}{b+c} + \frac{(c^2+1)-(a^2+1)}{c+a} \geq 2(|ab-1| + |bc-1| + |ca-1|)$$

Dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest

7. feladat

Határozzuk meg az $a, b, c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ számokat úgy, hogy

$$(\overline{aaaa})^2 + (\overline{bbbb})^2 + (\overline{cccc})^2 = 12221^2$$

Dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest

**8. feladat**

Határozzuk meg az $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ számjegyeket úgy, hogy:

$$\begin{cases} a(a^3 + b^3 + c^3) = \overline{cba} + ab + c^2 \\ \overline{abc} = ab^3 + c \end{cases}$$

Dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest

9. feladat

Bizonyítsuk be, hogy $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2xy + 3x + y + 2 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2xy + x + 3y = 8\}$

Dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest

10. feladat

a) Határozd meg az összes p prím számot, amelyekre $p^2 + 4, p^2 + 6$ is prímek.

b) Határozd meg az összes q prím számot, amelyekre $q + 4, q + 24, q^2 + 10, q^2 + 34$ is prímek

Dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest

11. feladat

Igazoljuk, hogy

$$\{3a + 1 \mid a \in \mathbb{Z}\} \cap \{5b + 3 \mid b \in \mathbb{Z}\} \cap \{7c + 4 \mid c \in \mathbb{Z}\} = \{105d - 171d \mid d \in \mathbb{Z}\}$$

Dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest

12. feladat

Határozd meg az összes a és b természetes számokat úgy, hogy $\frac{a^2+2b}{b^2-2a}$ és $\frac{b^2+2a}{a^2-2b}$ egész számok legyenek

Dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest

13. feladat

Határozzuk meg az $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ számokat úgy, hogy:

$$\begin{cases} \overline{aa} \cdot \overline{ab} = \overline{bb} \cdot \overline{ba} \\ \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 999 \end{cases}$$

Dr. Bencze Mihály, Ady Endre Elméleti Líceum, Bukarest

14. feladat

Ird fel a $2017^3 - 2015^3$ különbséget három különböző négyzetszám összegeként.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

15. feladat

Egy pozitív egész szám és számjegyeinek összege 2015, Mennyi lehet ez a szám?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

**16. feladat**

Határozd meg azokat az x és y egész számokat, amelyekre:

$$x - 5y^2 = \frac{x}{y}.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

17. feladat

Egy derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából az átfogóra bocsátott magasság a hegyesszögek szögfelezőivel olyan α és β hegyesszögeket zár be, amelyekre $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{5}$ teljesül.

Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

Bíró Bálint, Eger

18. feladat

Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, melyre a $\frac{p^2 + 19}{p - 3}$ tört értéke is prímszám!

Bíró Bálint, Eger

19. feladat

Egy 8×8 -as sakktáblára ráírtuk a pozitív egész számokat 1-től 64-ig, a bal felső sarokban kezdve és soronként balról jobbra haladva. Hány, az előző haladási sorrend szerint egymás utáni számot lehet a tábláról törölnünk, hogy a fennmaradó számok összege éppen 2015 legyen?

Bíró Bálint, Eger

20. feladat

Nagymamának az idén kevés szilva termett a kertben, a nagy szemű szilvából mindössze 10 kg, az apró szemű szilvából pedig 8 kg. Nagymama ezért elhatározta, hogy ahelyett, hogy a piacon a nagy szemű szilvát kilogrammonként 260 forintért, az apró szemű szilvát kilogrammonként 210 forintért

eladná, lekvárt főz az összes szilvából és azt fogja eladni. A nagy szemű szilva tömegének $\frac{1}{4}$ része,

az apró szemű szilvának $\frac{1}{3}$ része a szilva magja, amely főzéskor nyilván nem hasznosítható. A

szilva főzéséhez nagymama semmilyen adalékanyagot nem használ, de a szilva tömegének $\frac{4}{7}$ -része

a párolgás miatt kárba vész. Mennyiért adja nagymama az így elkészült kiváló minőségű szilvalekvár kilogrammját, hogy a szilva piaci eladásához képest éppen 1000 Ft többletbevétele legyen?

Bíró Bálint, Eger



21. feladat

Furcsaország lakóinak különös szokásai vannak. Az egyik az, hogy a hét bizonyos napjain hazudnak, a hét többi napján igazat mondanak, az ország egyes lakói más-más napokon. Még ennél is furcsább szokásuk az, hogy amit leírnak, abban soha sincs hazugság. Minden helyi lakos magánál hord egy cédulát, amelyre föl van írva, hogy mely napokon mond igazat és milyen napokon hazudik. Egyszer egy turista ellátogatott Furcsaország fővárosába, ahol szerette volna megnézni a világhírű Nemzeti Múzeumot. A fővárosba érkezve egy prospektusban azt olvasta, hogy a Nemzeti Múzeum csak páros napokon van zárva. Mivel a turista elfelejtette, hogy aznap éppen milyen nap van, ezért megkérdezett két helyi lakost. Az első először megmutatta a nála levő cédulát, amelyen ez állt: „a hét első négy napján hazudok, a többi napon igazat mondok”. A másik céduláján ez állt: „kedden, szerdán, csütörtökön és pénteken igazat mondok, a többi napon hazudok”. A látogató kérdésére, hogy „ma milyen nap van?”, az első azt mondta: „holnap igazat fogok mondani”, a második pedig ezt: „holnap én hazudni fogok”. Meglátogathatta-e aznap a turista a Nemzeti Múzeumot?

Bíró Bálint, Eger

22. feladat

Az ABC derékszögű háromszög BC és CA befogóira kifelé az ábra szerint megrajzoltuk a $BDEC$ és $CGFA$ négyzeteket. A négyzetek D és F csúcsaiból merőlegeseket állítottunk az AB átfogó egyenesére, a merőlegesek talppontjai P és R . Tudjuk, hogy $DP = p = 1088$ és $FR = r = 895$ hosszúságegység. Határozzuk meg az ABC háromszög oldalaira rajzolt négyzetek területének összegét!

Bíró Bálint, Eger

23. feladat

Egy papírból kivágott, 100 cm kerületű $ABCD$ téglalap D csúcsánál levő sarkát úgy hajtjuk be, hogy a D csúcs éppen az AB szakasz A -hoz közelebbi harmadolópontjába kerüljön. A keletkező hajtásél az AD szakaszt az E , a CD szakaszt az F pontban metszi oly módon, hogy az F éppen a CD szakasz C -hez legközelebbi hatadolópontja. Mekkora a téglalap területe?

Bíró Bálint, Eger

24. feladat

Adottak az $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ törtek, amelyek számlálója és nevezője is pozitív egész szám, és amelyek közül

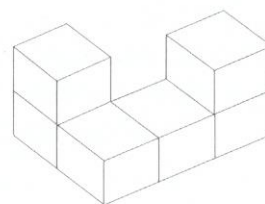
$\frac{a}{b}$ értéke 1-nél kisebb, míg $\frac{c}{d}$ értéke 1-nél nagyobb. Állítsuk növekvő sorrendbe az $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ és

$\frac{a+c+1}{b+d+1}$ törteket!

Bíró Bálint, Eger

**25. feladat**

Az ábrán látható test hat darab 2 cm élhosszúságú fa kocka érintkező oldalainak az összeragasztásával készült. Mekkora az keletkezett test felszíne?



így

Dr. Kántor Sándorné, Debrecen

26. feladat

Egy ritmikus gimnasztikai edzésen résztvevő tanulói csoport tagjait egyenletesen kör alakban állítják fel, majd a létszám ellenőrzésekor sorban, 1-től kezdve folyamatosan, mindenki kap egy számot. A 20. tanuló pontosan szembe kerül az 53. tanulóval. Hányan vettek részt az edzésen?

Dr. Kántor Sándorné, Debrecen

27. feladat

Az ábrán látható módon háromszög alakba rendeztük a természetes számokat. Milyen szám kerül a 89. sorban balról a negyedik helyre?

1

2 3 4

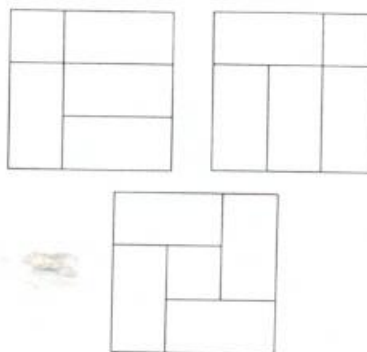
5 6 7 8 9

10 11 12 13 14 15 16

Dr. Kántor Sándorné, Debrecen

28. feladat

Hányféleképpen oszthatunk fel egy 3×3 -as négyzetet egy 1×1 -es négyzetre és négy 2×1 -es téglalapra? Ilyen felosztásokat láthatunk a mellékelt ábrán.



Dr. Kántor Sándorné, Debrecen

29. feladat -

A macskák száma Seholországban egy olyan hatjegyű szám, amely négyzetszám is és köbszám is. Ha hat macska elköltözik Csodaországba, akkor a macskák száma prímszám lesz. Hány macska lehetett eredetileg Seholországban?

Dr. Kántor Sándorné, Debrecen



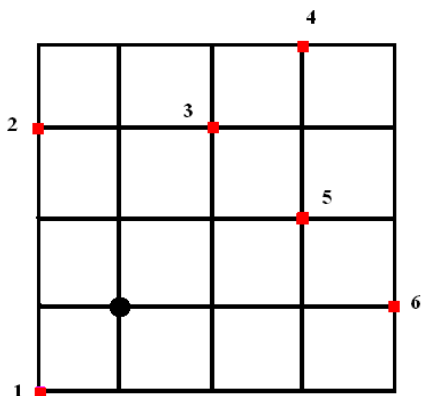
30. feladat

Három barát kirándulni ment, útközben egy kosárban diót találtak. Mikor megérkeztek a sátorozóhelyre, fáradtan elmentek lefeküdni. Valamennyi idő után felébredt az egyik kiránduló és megezte a diók egyharmadát, majd visszafeküdt. Ezután nemsokára felébredt a második kiránduló is és megezte a kosárban talált diómennyiség egyharmadát, majd visszafeküdt. Ugyanígy járt el a harmadik társuk is. Így az első 10 dióval többet evett meg a harmadiknál. Hány dió volt eredetileg a kosárban?

Durugy Erika, Torda

31. feladat

A négyzetrácsban megjelölt fekete pont egy posta, a fekete vonalak utcák, a számokkal jelölt pontok pedig olyan lakások, ahova napilapot kell kihordani. A négyzetrács egyik kicsi négyzetének oldalhossza 100 m.



Baloldalas Balázs páros napokon, Jobboldalas József páratlan napokon hordja ki az újságot a megjelölt helyekre. Baloldalas Balázs csak balra szokott fordulni az utcasarkokon, Jobboldalas Józsi csak jobbra fordul az utcasarkokon, de mindketten a saját szabályaik betartása mellett a lehető legrövidebb útvonalat választják. Újságkihordás után visszatérnek a postára.

- Melyiküknek rövidebb az útvonala és hány méterrel?
- Melyiküknek rövidebb az útvonala, tudva, hogy először az 1-gyel jelölt házba kell kiszállítani a rendelést?

Durugy Erika, Torda

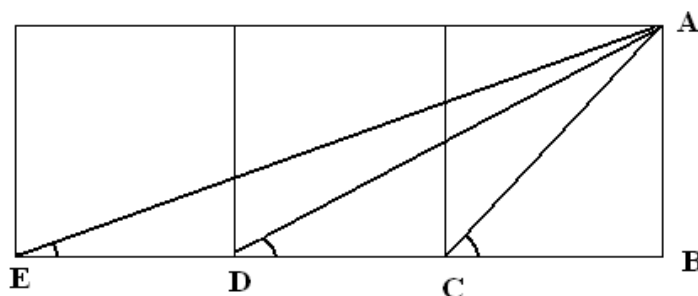
32. feladat

A bushman család strucctojást süt reggelire, mely akkor a legfinomabb ha pontosan 15 percig sül a lángokban. A bushman családnak két homokórája van, egy 7 perces és egy 11 perces. Hogyan kell eljárniuk, ha pontosan 15 percig akarják sütni a tojást?

Durugy Erika, Torda

33. feladat

A mellékelt ábrán látható három négyzet oldalhossza egyenlő. Igazold, hogy:
 $m(\widehat{AED}) + m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ACB})$



Durugy Erika, Torda



34. feladat

Az ABC háromszögben $AB = AC$ és a B szög mértéke 80° . Az AB száron felvesszük a D pontot úgy, hogy $AD = BC$. Az AD szakaszra megszerkesztjük az ABC háromszögön kívül az ADE egyenlő oldalú háromszöget.

Igazoljuk, hogy a) $\triangle CAE \cong \triangle ABC$

b) Ha F az E pont AD szerinti szimmetrikusa, akkor igazoljuk, hogy $DF \perp DC$.

Megjegyzés: közepes feladatnak javaslom

Koczinger Éva, Szatmárnémeti, Hám János Római Katolikus Líceum

35. feladat

Az ABC háromszögben $AB = AC$ és a B szög mértéke 80° . Az AB száron felvesszük a D pontot úgy, hogy $AD = BC$. Az AD szakaszra megszerkesztjük az ABC háromszögön kívül az ADE egyenlő oldalú háromszöget.

Igazoljuk, hogy a) [CD félegyenest szögfelezője az $\widehat{ACE}$ szögnek

b) EMB háromszög egyenlő szárú, Ahol M az EC és AB szakaszok metszéspontja.

Megjegyzés: nehezebb feladatnak javaslom

Koczinger Éva, Szatmárnémeti, Hám János Rmai Katolikus Líceum

36. feladat

Az $\widehat{AOB}$ derékszöget az O csúcsból kiinduló $[OM_1, [OM_2, \dots, [OM_n$ félegyenese az $\widehat{AOM_1}$, $\widehat{M_1OM_2}, \dots, \widehat{M_nOB}$ egymás melletti szögekre bontják, melyek mértékei 5° , 19° vagy 23° . Ha a félegyeneseket úgy szerkesztjük meg, hogy az $[OA$ szártól vett első három szög mértékének összege a lehető legkisebb, míg az $[OB$ szártól vett első három szög mértékének összege a lehető legnagyobb legyen, határozzuk meg az $\widehat{AOM_3}$ és az $\widehat{M_{n-2}OB}$ szögek szögfelezői által bezárt szög mértékét.

Koczinger Éva, Szatmárnémeti, Hám János Rmai Katolikus Líceum

37. feladat

Igazoljátok, hogy bármely $x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ számok esetén $x^2 - x + 1 > 0$

Faluvégi Melánia, Zilah

38. feladat

a) Bontsátok tényezőkre a $16n^2 + 8n - 3$ kifejezést.

b) Határozzátok meg az $n \in \mathbb{N}$ szám értékét a következő egyenlőségből:

$$\frac{1}{21} + \frac{1}{77} + \frac{1}{165} + \dots + \frac{1}{16n^2 + 8n - 3} = \frac{n}{24189}$$



Faluvégi Melánia, Zilah- Oláh Miklós, Kraszna

39. feladat

Az $A_1A_2A_3A_4$ téglalapba az $[A_1A_2]$ oldalon felvett K rögzített pontból kiindulva beírjuk a $KB_2B_3B_4$ és $KC_2C_3C_4$ téglalapokat úgy, hogy B_2 és $C_2 \in [A_2A_3]$, B_3 és $C_3 \in [A_3A_4]$ illetve B_4 és $C_4 \in [A_1A_4]$.

Igazoljátok, hogy ez a szerkesztés maga után vonja azt, hogy az eredeti téglalap ter-lete egyenlő a két beírt téglalp területének összegével:

$$TA_1A_2A_3A_4 = TK B_2B_3B_4 + TK C_2C_3C_4.$$

Nyitrai János, János Zsigmond Unitárius Kollégium, Kolozsvár

40. feladat

Helyezzünk egy egységnyi oldalhosszúságú négyzetbe 2049 pontot. Igazoljuk, hogy létezik egy $0,03125$ sugarú kör, amelyben biztosan található legalább három pont az előzőek közül.

Nyitrai János, János Zsigmond Unitárius Kollégium, Kolozsvár

41. feladat

A $P_1P_2P_3P_4P_5$ sokszög csúcsai úgy helyezkednek el egy $AB=24\text{cm}$ átmérjű kör egyik félkörén hogy $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_5$. A sokszög közben ebben a félkörben úgy csúszkál, hogy $m(\widehat{AP_1}) = 30^\circ - x$ és $m(\widehat{BP_6}) = 30^\circ + x$, ahol $x \in [0^\circ, 30^\circ]$.

Egy C pontnak az a feladata, hogy a másik félkörön elhelyezve úgy igazodjon a sokszög után, hogy a CP_1P_2 , CP_2P_3 , CP_3P_4 és CP_4P_5 háromszögek területének összege a lehető legnagyobb legyen. Számítsátok ki ezt a maximális összeget.

Nyitrai János, János Zsigmond Unitárius Kollégium, Kolozsvár

42. feladat

Oldjátok meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$a^2 + 2014 \cdot b^2 + 2015 \cdot c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{2014}{b^2} + \frac{2015}{c^2} = 8060.$$

Nyitrai János, János Zsigmond Unitárius Kollégium, Kolozsvár

43. feladat

Az iskola diákönkormányzata szavazást írt ki az elnöki funkció betöltésére. A három jelölt: Cserepes Virág, Török Rózsa és Szép Boglárka nem szavazhattak. Minden tanuló egy jelöltre adta le szavazatát.

Az első héten 400 diák szavazott, és a leadott szavazatok aránya $4 : 8 : 13$ volt. A következő héten a többiek is leadták szavazatuk, így az arány megváltozott és $6 : 9 : 16$ lett. Legalább hány tanulója van az iskolának?

Horváth Katalin SJG, Komárom

44. feladat

Egy 13 cm hosszú papírcsíkon készíts a lehető legkevesebb beosztást úgy, hogy 1 től 13 -ig minden hosszúságot mérni tudjunk.



Horváth Katalin SJG, Komárom

45. feladat

Hány olyan négyjegyű szám van, melyben csak az idei év – 2015- számjegyei szerepelnek, és a számjegyeket összeadva négyzetszámot kapunk./ Egy számjegyet egy számon belül többször is felhasználhatsz./

Horváth Katalin SJG, Komárom

46. feladat

Az 1-től el kell jutni a 2016-ig a pozitív egész számokon át a következő műveletek közül valamelyiket alkalmazva: az utoljára kapott számhoz 1-et adunk, vagy a számot megszorozzuk 4-gyel. Mely számokon át vezet az út 1-től a 2016-ig a lehető legkevesebb lépésben?

Horváth Katalin SJG, Komárom

47. feladat

Három vándor Sándor, József és Benedek találkozott egy útelágazásnál. Sándornak 4, Józsefnek 6 szem pogácsája volt. Benedeknél nem volt élelem, de volt 5 tallérja. A pogácsákat igazságosan szétosztották hármuk között. Hány tallért adott a pogácsákért Benedek Sándornak és Józsefnek?

Horváth Katalin SJG, Komárom

48. feladat

Egy 5×5 –ös négyzetrács bal alsó négyzetében ül egy bolha. Jobbra és felfelé bármekkora tud ugrani. Hányféleképpen juthat el a jobb felső négyzetbe?

Horváth Katalin SJG, Komárom

49. feladat

Egy $10 \times 10 \times 10$ -es kockát szétvágunk $1 \times 1 \times 1$ - es kicsi kockákra. Fel lehet-e építeni belőlük néhány különböző nagyságú kockát úgy, hogy felhasználjuk az összes kicsi kockát? Ha igen, hogyan? Ha nem, miért?

Kekenyák Szilvia, Kassa

50. feladat

Barnára festettem egy 100 darab lécből álló kerítést. Hogy ne legyen olyan egyhangú, minden 4. lécre ráfestettem egy kék téglalapot, minden 3. lécre egy piros háromszöget és minden 10.-re pedig egy sárga kört. Minden alkalommal jobbról balra haladtam és úgy számoltam. Hány olyan léce van, melyen mind a három jel megtalálható? Hány olyan, melyen egy jel sincs?

Kekenyák Szilvia, Kassa

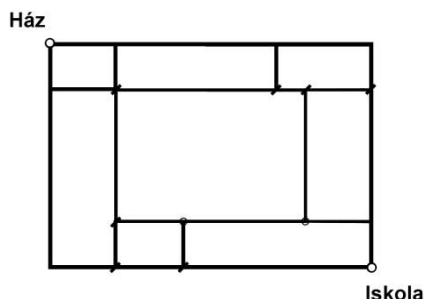
51. feladat

Az egyenlőszárú ABC háromszög kerülete 70 cm. Legyen a BC szár felezőpontja D, az AC szár felezőpontja pedig E. Tudjuk, hogy az ABE háromszög kerülete 8 cm-rel nagyobb, mint az ACD háromszög kerülete. Határozzátok meg az ABC háromszög méreteit!

Kekenyák Szilvia, Kassa

**52. feladat**

Misi egy hétalvó: minden reggel futva teszi meg az utat a házuktól az iskolájába, hogy el ne késsen. Segítsünk neki! Hányféle útvonal közül választhat, hogy azok a legrövidebbek legyenek? A „térképen” látható Misiék háza, iskolája, valamint azok az utcák, melyeken Misi közlekedhet.



Kekenyák Szilvia, Kassa

53. feladat

Egy diákcsoport tagjai egy nap folyamán telefonbeszélgetéseket folytattak egymással.

Aznap a csoport mindegyik tagja 3 telefonbeszélgetést folytatott, kivéve egyet, aki csak két telefonbeszélgetést folytatott.

- Legkevesebb hányan lehettek a csoportban?
- Megvalósíthatók-e ilyen feltételek melletti telefonbeszélgetések, ha a csoportban pontosan 16 személy van?
- Megvalósíthatók-e ilyen feltételek melletti telefonbeszélgetések, ha a csoportban pontosan 21 személy van?

Indokoljuk meg a válaszokat.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

54. feladat

Oldjuk meg az egész számok halmazában a következő egyenletet:

$$x^2 + xy + 45y = 2015$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

55. feladat

Határozzuk meg az m és n valós számokat és számítsuk ki az $x + y + z$ összeg értékét, ha az x , y , z valós számokra teljesülnek a következő feltételek: $4x - 9y^2 = 3 - 2m + n$, $6y - 36z^2 = 2m - 1$ és $12z - 4x^2 = 1 - n$.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

**56. feladat**

Határozzuk meg az a természetes szám értékeit és az $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvényeket, amelyekre teljesül a következő feltétel: $af(x) + (a+1)f(a-x) = 11a - (a+1)x$.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

57. feladat

Határozzuk meg az $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvényeket, amelyekre igaz:

$$21f(x) + 22f(21-x) = 231 - 22x.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

58. feladat

A 2, 3, 5, 11, 13, 19, 31, 53, 61 számokat helyezzük el hármass csoportokban úgy, hogy az egyes csoportokban a számok szorzatai egymás után következő természetes számok legyenek.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

59. feladat

Határozzuk meg az $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvényeket, amelyekre igaz:

$$7f(x) + 8f(8-x) = 77 - 8x.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

60. feladat

Az a, b és c természetes számok 17-tel való osztási maradékai 5, 3 és 1.

Határozzuk meg azt a legkisebb k természetes számot, amelyre $a + 3b + kc$ osztható 17-tel.

Mátéfi István, Marosvásárhely, Bolyai Farkas Elméleti Liceum

61. feladat

Adott az $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} + 2^{64}$ természetes szám.

g) Igazoljuk, hogy S osztható 30-cal.

h) Határozzuk meg az x természetes számot úgy, hogy:

$$(2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} + 2^{64}) : (1 + 2^5 + 2^9 + \dots + 2^{61}) + 397 \cdot x = 2015$$

Mátéfi István, Marosvásárhely, Bolyai Farkas Elméleti Liceum

62. feladat

Adott pl. a 12645 ötjegyű szám. 1 osztja 1-et, 2 osztja 12-et, 126 osztható 3-mal, 1264 pedig 4-gyel s végül 12645 pedig 5-tel.

Hány ilyen tulajdonságú 5-jegyű szám létezik.



Mészáros József, Galánta

63. feladat

Töltsd ki a táblázat számozott mezőit az A, J, K, N, Ó betűkkel úgy, hogy minden sorban, oszlopban és mindkét átlóban mindegyik betű előforduljon.

1	2	3	4	J
5	6	7	8	A
9	10	11	12	N
J	Ó	N	A	K
13	14	15	16	Ó

Nagy Baló András, Budapest

64. feladat

A 2015-nél kisebb pozitív egész számok közül húzzuk ki azokat, amelyeknek valamelyik számjegye prímszám. Hány áthúzatlan szám marad közülük?

Nagy Baló András, Budapest

65. feladat

Jelölje $f(n)$ az n természetes szám jegyeinek szorzatát.

Mennyi az $f(1000)+f(1001)+f(1002)+\dots+f(2015)$ összeg értéke?

Nagy Baló András, Budapest

66. feladat

Az $ABCD$ egységnyi oldalú négyzet A csúcsából két bogár indul el körbe az oldalakon, az egyik B , a másik D irányába. A B irányába induló bogár v , a D irányába induló $2v$ sebességgel halad. Hol találkozik először a két bogár?

Nagy Baló András, Budapest

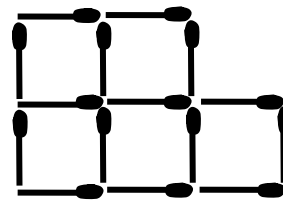
67. feladat

A sárkány, hogy mentse az életét, megmutatta Jánosnak az aranyrudakat tartalmazó ládáját, és azt mondta: „Tegyél a zsákodba legalább egy aranyrudat. Azután én visszateszek a zsákodból a ládámba legalább egy rudat, de más darabszámút, mint ahányat te elvettél. Így fogjuk egymás után rakosgatni a rudakat: te a ládámból a zsákodba, én a zsákodból a ládámba, de minden egyes alkalommal az összes korábbi áttevéstől különböző darabszámút. Amikor ennek a szabálynak a betartásával már nem lehet folytatni az áttevést, elviheted, ami éppen akkor lesz a zsákodban.” Legtöbb hány aranyrúddal távozhatott János, ha a ládában eredetileg 10 aranyrúd volt, és a sárkány mindent megtett azért, hogy a lehető legkevesebb aranyrúd legyen Jánosé?

Nagy Baló András, Budapest

**68. feladat**

Az ábrán lévő gyufaszálak közül hány vehető el úgy, hogy csak három négyzet maradjon, s minden megmaradt gyufaszál valamelyik négyzet oldalán legyen?



Nagy Baló András, Budapest

69. feladat

Egy labdarugó bajnokságban az *Aranylábúak*, a *Gólvágók*, a *Villámgyorsak* és a *Futottak még* csapatok mindegyike egy-egy mérkőzést játszott a többi három csapat ellen. A verseny végén a következő táblázatot hozták nyilvánosságra:

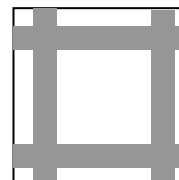
Hely	Csapat neve	Mérkőzések száma			Gólok száma	
		nyert	döntetlen	vesztett	lőtt	kapott
1.	Aranylábúak	2	1	0	4	1
2.	Gólvágók	2	0	1	4	1
3.	Villámgyorsak	0	2	1	1	2
4.	Futottak még	0	1	2	0	5

Milyen eredmény születhetett egy-egy mérkőzésen?

Nagy Baló András, Budapest

70. feladat

Egy 40 centiméter oldalhosszúságú, négyzet alakú konyhakendőn a színes szélessége 2 centiméter. Hány négyzetcentiméter nagyságú a kendő fehér

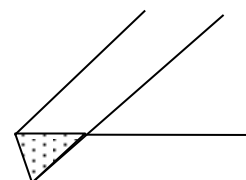


csík része?

Nagy Baló András, Budapest

71. feladat

Egy tetszőlegesen hosszú, 7 centiméter széles papírcsíkot gyűrődés meghajtunk az ábra szerint. Hány négyzetcentiméter lehet a kétszeresen lefedett, pontozott rész területe?



nélkül

Nagy Baló András, Budapest

72. feladat

Keresd meg az összes olyan természetes a , b , c számokból álló számhármast, amelyre $ab + bc + ca = 2(a + b + c)$!



Mennyi lehet a $2a + b - c$ értéke?

Nagy Baló András, Budapest

73. feladat

Egy test minden lapja 1 centiméter oldalhosszúságú négyzet. Hány négyzetcentiméter lehet a felszíne?

Nagy Baló András, Budapest

74. feladat

Töltsd ki a táblázat számozott mezőit az A, J, K, N, Ó betűkkel úgy, hogy minden sorban, oszlopban és mindkét átlóban mindegyik betű előforduljon.

1	2	3	4	J
5	6	7	8	A
9	10	11	12	N
J	Ó	N	A	K
13	14	15	16	Ó

Nagy Baló András, Budapest

75. feladat

A 2015-nél kisebb pozitív egész számok közül húzzuk ki azokat, amelyeknek valamelyik számjegye prímszám. Hány áthúzatlan szám marad közülük?

Nagy Baló András, Budapest

76. feladat

Jelölje $f(n)$ az n természetes szám jegyeinek szorzatát.

Mennyi az $f(1000)+f(1001)+f(1002)+\dots+f(2015)$ összeg értéke?

Nagy Baló András, Budapest

77. feladat

Az $ABCD$ egységnyi oldalú négyzet A csúcsából két bogár indul el körbe az oldalakon, az egyik B , a másik D irányába. A B irányába induló bogár v , a D irányába induló $2v$ sebességgel halad. Hol találkozik először a két bogár?

Nagy Baló András, Budapest

78. feladat

A sárkány, hogy mentse az életét, megmutatta Jánosnak az aranyrudakat tartalmazó ládját, és azt mondta: „Tegyél a zsákodba legalább egy aranyrudat. Azután én visszateszek a zsákodból a ládámba legalább egy rudat, de más darabszámút, mint ahányat te elvettél. Így fogjuk egymás után rakosgatni a rudakat: te a ládámból a zsákodba, én a zsákodból a ládámba, de minden egyes alkalommal az összes korábbi áttevéstől különböző darabszámút. Amikor ennek a szabálynak a betartásával már nem lehet folytatni az áttevést, elviheted, ami éppen akkor lesz a zsákodban.” Legtöbb hány aranyrúddal távozhatott János, ha a ládában eredetileg 10 aranyrúd volt, és a sárkány mindent megtett azért, hogy a lehető legkevesebb aranyrúd legyen Jánosé?



Nagy Baló András, Budapest

79. feladat

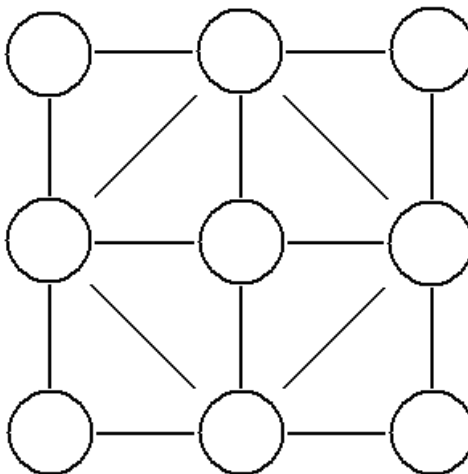
Albrecht Dürer (1471–1528) német festő, grafikus *Melankólia* c. rézmetszetén egy bűvös négyzet is szerepel, amelyben minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban a számok összege azonos. A táblázatba az 1, 2, 3, 4, ..., 15, 16 számok kerültek. Dürer bűvös négyzetét most hiányosan látjuk. Töltsd ki az üres mezőket!

16	3	2	13
5			8
9			12
4			1

Róka Sándor, Nyíregyháza

80. feladat

Írd be a körökbe az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat úgy, hogy mindegyik négyzet (összesen 6 négyzetet látunk) négy csúcsában álló számok összege 20 legyen.



Róka Sándor, Nyíregyháza

81. feladat

Egy fiú szorosan összefogott egy kék és egy sárga ceruzát. A kék ceruzának azt az oldalát, amelyikkel a sárga érintkezett, a végétől számított 1 cm hosszúságban befestékezte. Ezután a sárga ceruzát 1 cm-rel lejjebb húzta, miközben továbbra is hozzászorította a mozdulatlanul tartott kék ceruzához, majd eredeti helyzetébe visszatolta. Ismét lecsúsztotta 1 cm-rel, majd ismét visszatolta. Ezt a műveletet tízszer végezte el: tízszer húzta lejjebb, és tízszer tolt vissza a sárga ceruzát (ez összesen húsz ütem).

Ha feltesszük, hogy a festék nem száradt meg és nem kopott le teljesen, akkor a 20. ütem végén hány cm-nyi hosszban szennyeződött be a sárga ceruza?

Róka Sándor, Nyíregyháza

**82. feladat**

Keresd meg az olyan háromjegyű számpárokat, amelyek különbsége 100, és amelyek közül az egyik 6-tal, a másik pedig 7-tel osztható. Hány ilyen számpár van?

Róka Sándor, Nyíregyháza

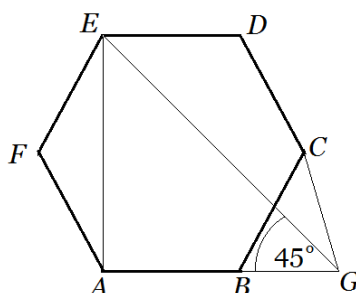
83. feladat

Egy konvex hétszög minden átlóját meghúztuk, és azt találtuk, hogy a hétszög belsejének egyik pontján sem halad át kettőnél több átló. Hány olyan háromszög keletkezik így, amelynek egyik csúcsa sem esik egybe a hétszög valamelyik csúcsával?

Róka Sándor, Nyíregyháza

84. feladat

Az $ABCDEF$ szabályos hatszög AB oldalegyenesének G pontjára $\angle AGE = 45^\circ$. Mekkora az $\angle AGC$ szög?



Róka Sándor, Nyíregyháza

85. feladat

Egy hajó a tavon a parttal párhuzamosan halad, gyorsabban, mint ahogy mi a parton sétálunk. Ha a hajó elejével egy vonalban vagyunk, és elindulunk a hajóval egy irányban, akkor 200 lépésünk után a hajó teljes hosszával elhalad mellettünk. Ha a hajó elejével egy vonalban vagyunk, és a hajóval ellenkező irányban sétálunk, akkor már 40 lépés után a hajó végével leszünk egy vonalban. Hány lépés a hajó hossza? (Lépéseink hossza és ideje mindkét esetben ugyanakkora.)

Róka Sándor, Nyíregyháza

86. feladat

Adott az $ABCD$ konvex (domború) négyszög, melyben A és B pótyszögek. Igazoljátok, hogy:

g) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

h) D -ben az AD oldalra és C -ben a BC oldalra emelt merőlegesek, egymásra is merőlegesek.

Oláh Miklós, Kraszna

87. feladat

Tüskés Petit híres tudós a nagyon távoli Kasszioppéa bolygón él és nagyon szereti a csillagos égboltot figyelni, de legfőképp az üstökösöket. Legutóbb a Hejhaj nevű üstököst tanulmányozta és megállapította, hogy a tömegvesztése miatt a visszatérési ideje mindig növekszik. Idén látta már, feljegyzéseket talált arról, hogy az üstökös először időszámításunk után 5-ben volt látható, majd 65-



ben ismét és kiszámolta azt is, hogy legközelebb 137020 év múlva lesz csak újra látható. Ezért idén nagyon jól megnézte (ezt ki lehet törölni). Állapítsd meg, milyen szabály alapján kering az üstökös?

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

88. feladat

Ha összeadjuk két természetes szám összegét, különbségét, szorzatát és hányadosának kétszeresét, eredményül 2015-öt kapunk. Mi lehet ez a két szám?

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

89. feladat

Sárikának 2015 egyforma méretű zsetonja van és mindegyiken egy szám szerepel 1-től 2015-ig. Nincs két egyforma számot tartalmazó zseton. Sárika találomra kiválasztott 403 zsetont. Igazold, hogy annak a valószínűsége, hogy legyen közöttük két olyan szám, melyek különbsége 1209 legalább $\frac{1}{4}$!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

90. feladat

Az a élű $DABC$ szabályos tetraéderben legyenek G_1, G_2, G_3 pontok rendre a DAB, DAC és DBC oldallapjainak súlypontjai. Legyenek továbbá E, F, G rendre a DA, DC, DB oldalélek D -hez közelebb eső harmadoló pontjai.

- Igazold, hogy FEG_1G_3 , FGG_1G_2 és EGG_3G_2 négyzetek!
- Számítsd ki a függvényében annak a testnek a térfogatát, amelyet a VEG_1G , VEG_2F és VFG_3G négyszögek, illetve a EG_2G_1 , GG_1G_3 , FG_2G_3 és $G_3G_2G_1$ háromszögek határolnak!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

91. feladat

Pistike imádja a csokit. Ahhoz, hogy ne vigye túlzásba a fogyasztását, anyukája egy páncélszekrénybe helyezte a csokikat. A páncélszekrény zárszerkezetéhez egy jobbra vagy balra fordítható kulcs és egy kijelző tartozik. A zárszerkezet működési elve a következő: a kijelzőn egy változó értékű k természetes szám jelenik meg ez egy másik, szintén változó $n = 2^k$ számnak felel meg, ha a kulcsot jobbra fordítják akkor a zárszerkezetéhez tartozó tárcsa $2 \cdot n$ elemi fordulatot tesz és a k értéke eggyel növekszik, ha pedig balra akkor $\frac{n}{2}$ elemi fordulatot és a k értéke pedig eggyel csökken. A tárcsa mindig azonos irányba forog. A páncélszekrény csak akkor nyit, ha először k – szor jobbra fordítják a kulcsot, ezek után a k értéke visszaáll az eredeti k értékre, amit az elején a kijelzőn láttunk és ezek után k – szor balra fordítják. Ha becsukják a páncélszekrényt, k értéke eggyel növekszik a kijelzőn látott eredeti k értékhez viszonyítva (a k értékét csak a zárszerkezet módosíthatja). Pistike megtalálta a páncélszekrény nyitásának leírását és néhányszor már „szerzett” csokit. Milyen érték volt a kijelzőn, ha tudjuk, hogy a tárcsa az utolsó nyitáskor 2015 elemi fordulatot tett? Mennyi elemi fordulat volt a harmadik nyitáskor?

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

**92. feladat**

Igazold, hogy $2013^{2013} + 2014^{2014} + 2015^{2015} + 2016^{2016}$ szám osztható 10-zel.

Polcz Zita, Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti

93. feladat

Igazoljuk, hogy 10^{4028} szám felírható négy teljes köb összegeként.

Polcz Zita, Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti

94. feladat

Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + 4z^2 = 2015$ egyenletet.

Polcz Zita, Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti

95. feladat

Ha $a \in \mathbb{N}^*$, akkor igazoljuk, hogy az $A = a^{2015} - a^{2011}$ szám osztható 30-cal.

Polcz Zita, Hám János Római Katolikus Teológiai Líceum, Szatmárnémeti

96. feladat

Feri, Gyula, Jancsi és Karsci meglátogatták a barátjukat. A négy fiú családi neve- valamilyen sorrendben: Kiss, Nagy, Szabó és Molnár. Elsőnek Molnár érkezett, másodiknak Jancsi, ezután Kiss és végül Gyula. Mindenki hozott egy ajándékot: Molnár bűvös kockát, Feri golyóstollat, Gyula virágot, Szabó pedig könyvet.

Mi a négy fiú teljes neve?

Szabó Magda, Szabadka-Zenta

97. feladat

100 golyót úgy osztottak el a gyerekek között, hogy az első kapott valahány golyót, a második 1-gyel többet, mint az első, a harmadik 1-gyel többet mint a második és így tovább: minden gyerek 1-gyel többet mint az előtte levő.

Hány gyerek között oszthatták el a golyókat, és mennyit kapott egy-egy gyerek?

Szabó Magda, Szabadka-Zenta

98. feladat

Van-e olyan n természetes szám, amelyre az $1+2+3+\dots+(n-1)+n$ összeg 2015-tel egyenlő és mi a helyzet a 2016-tal ?

Szabó Magda, Szabadka-Zenta

99. feladat

Van-e olyan 4-jegyű szám, ami teljes négyzet és a tízes számrendszerbeli alakja: ABBA?

Szabó Magda, Szabadka-Zenta

**100. feladat**

Egy háromjegyű szám középső számjegyét töröltük. Mi lehet a háromjegyű szám, ha az így kapott kétjegyű szám 9-ed része az eredeti számnak?

Szabó Magda, Szabadka-Zenta

101. feladat

Egy 10-nél kisebb, de 1-nél nagyobb n -nel jelölt természetes számot megszoroztunk 38-al, a szorzatot pedig 76-tal, a kapott eredményhez hozzáadtunk 7-et, és olyan számhoz jutottunk, amelynek a végén (egyesek helyén) 9 áll.

Mi lehet az n -nel jelölt szám?

Szabó Magda, Szabadka-Zenta

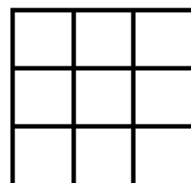
102. feladat

Valaki úgy megy fel a lépcsőn, hogy egyesével fokról-fokra lép vagy 1-1 lépcsőt kihagy. Hányféleképpen juthat fel a 3. lépcsőfokra, a 4.-re, 5.-re, 6.-ra és hányféleképpen a 10.-re?

Szabó Magda, Szabadka-Zenta

103. feladat

Hány darab egyenlő szárú, de nem derékszögű háromszöget határoznak az adott négyzetrács pontjai?



meg

Tóth Gabriella, Palics

104. feladat

Hányszor kell a 2015 négyjegyű számot egymás után leírni úgy, hogy az így kapott szám osztható legyen 93-mal? Határozd meg a hányados értékét is!

Tóth Gabriella, Palics

105. feladat

Határozd meg hány olyan egyenlőszárú háromszög van, melynek oldalai cm-ben kifejezve egész számok és a területük 2015 cm!

Tóth Gabriella, Palics

106. feladat

Határozd meg az x és y összes olyan egész számpárt, melyre teljesül a következő összefüggés:

$$|x+1| \cdot (z-3) = 2015!$$

Tóth Gabriella, Palics

**107. feladat**

Adott az ABC háromszög. A háromszög AB, BC és CA oldalain vegyük fel sorban a D, E és F pontokat, úgy, hogy érvényesek legyenek a következő összefüggések:

$$AD : DB = 1 : 2, \quad BE : EC = 2 : 3, \quad CF : FA = 3 : 4.$$

Határozd meg a DEF és az ABC háromszög területei közötti összefüggést!

Tóth Gabriella, Palics

108. feladat

Mennyi az $a^{2015} - 2015 \cdot b$ értéke, ha az $a^2 + b^2 - 2a + 6b + 10 = 0$?

Tóth Gabriella, Palics

109. feladat

Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 81x^2 + 324x - 324 = 0.$$

Tóth Gabriella, Palics

110. feladat

Egy 256 cm^2 területű négyzetnek levágtuk a négy „sarkát”, négy egymással egybevágó egyenlőszárú derékszögű háromszöget. Az így kapott nyolcszög kerülete egyenlő a levágott négy háromszög kerületének az összegével. Számítsd ki a nyolcszög kerületét és területét!

Tóth Gabriella, Palics

111. feladat

Egy különböző számjegyekből álló háromjegyű természetes szám ötször nagyobb, mint számjegyeinek szorzata. Melyik ez a szám?

Császár Sándor, Csíkszereda

112. feladat

Az Erdélyi Matematikaversenyen négy teremben tetszőlegesen osztottak el 100 versenyző diákot, fiúkat és lányokat egyaránt, úgy hogy mindegyik teremben különböző számú diák került. Mennyi lehet az azonos nemű tanulók száma, amennyit biztosan találhatunk valamelyik teremben?

Császár Sándor, Csíkszereda

113. feladat

Egy könyvkereskedő pénteken a legjobban fogyó könyvének árát 20%-kal megnövelte, de miután egy hétig egyetlen példányt sem tudott eladni belőle, 10%-kal csökkentette az árát. Eltelt ismét egy hét, és miután e hét alatt sem tudott a könyvből értékesíteni, ismét csökkentette a könyv árát, ekkor 25%-kal. Így a könyv 19 krajcárral került kevesebbe, mint az áremelés előtt. Mennyibe került eredetileg, áremelés előtt, a könyv?

Császár Sándor, Csíkszereda

**114. feladat**

Az a és b természetes számok aránya, $\frac{a}{b} = 1,4$. Melyik a legkisebb n természetes szám, melyre

$$\left(1 + \frac{3a}{2a+7b}\right)^n > 4 ?$$

Császár Sándor, Csíkszereda

115. feladat

Matyi egy kirándulás során egy kirakatban meglátott 8 különböző ólomkatonát, amit már régóta meg akart szerezni gyűjteményébe. A katonák egész számú euróba kerültek. Sajnos csak 7 katonára volt elég pénze. Összeadva bármelyik 7 katona árát a nyolc katona közül, és az egyforma összegeket csak egyszer lejegyezve, a következő összegeket kapta: 81, 82, 83, 84, 85, 86, és 87. Hány euróba kerültek külön-külön az ólomkatonák?

Császár Sándor, Csíkszereda

116. feladat

Legyen A egy olyan ötjegyű szám, mely egyenlő számjegyei szorzatának 45-szörösével.

a) Igazoljátok, hogy az A számjegyei közül legkevesebb két számjegy egyforma.

b) Határozzátok meg az A értékét.

Császár Sándor, Csíkszereda

117. feladat

Az ABC_Δ – ben $m(\angle A) = 90^\circ$, és $AB = 2AC$. Legyen AD az $\angle BAC$ szögfelezője, ahol $D \in BC$. Megszerkesztjük ABC_Δ háromszög AB és BC oldalát E illetve F pontban metsző d egyenest, úgy, hogy $m(\angle AEF) = m(\angle ACB)$. Ha $d \cap AD = \{G\}$.

Igazoljuk, hogy:

a) $DC = \frac{1}{3}BC$

b) FDG_Δ – egyenlő szárú

Császár Sándor, Csíkszereda

118. feladat

Hány olyan n természetes szám létezik, mellyel ha elosztjuk a 792 és 216 számokat ugyanazt a maradékot kapjuk?

Császár Sándor, Csíkszereda

119. feladat

Oldjuk meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán:

$$5^x - 8 \cdot 5^y - 22 \cdot 5^z = 2015, \quad \text{ahol } x > y > z$$

Császár Sándor, Csíkszereda

120. feladat

Egy zsákba belehelyeztünk valamennyi kék színű golyót, és 9-szer több zöld színű golyót. Találomra kiveszünk a zsákból két golyót. Annak valószínűsége, hogy mindkét golyó kéksínű legyen 20-szor kevesebb, mint annak, hogy a két golyó különböző színű legyen.

a) Hány kéksínű golyó van a zsákban?

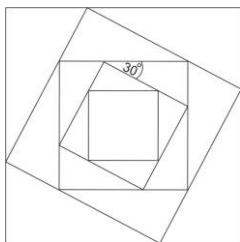


b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy két különböző színű golyót húzunk a zsákból?

Császár Sándor, Csíkszereda

121. feladat

Öt különböző méretű négyzet alakú lapot úgy helyeztünk el egymáson, hogy a kisebb négyzetlap csúcsai rajta legyenek a méretben utána következő négyzet oldalain, bármelyik két méretben egymás után következő négyzet oldala egy 30 fokos szöget is zárjon be egymással, és minden második négyzet oldala párhuzamos legyen (lásd az alábbi ábrát). A legnagyobb négyzet területe 1 cm^2 .



Határozzuk meg a legkisebb négyzet oldalát.

Császár Sándor, Csíkszereda

122. feladat

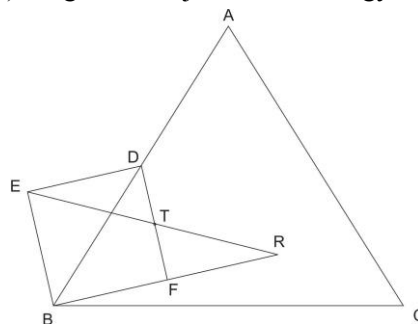
Az ABC egyenlő oldalú háromszögben D az AB felezőpontja. (1. ábra) Megszerkesztjük a $BFDE$ négyzetet, úgy, hogy $F \in \text{int } ABC_{\Delta}$ (F az ABC_{Δ} belső pontja.) Ha $T \in$

DF , úgy, hogy $[DT] \equiv [TF]$, és $ET \cap BF = \{R\}$, igazoljuk, hogy:

a) $AR \perp BF$

b) ADR_{Δ} egyenlő szárú

c) C, R és D pontok kollineárisak



Császár Sándor, Csíkszereda

123. feladat

Hány osztója van annak az ötjegyű természetes számnak, mely teljes négyzet, és mely osztható a páratlan számjegyekkel?

Császár Sándor, Csíkszereda

124. feladat

Határozzátok meg az $x \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy $A = \frac{2x+7}{x^2+8x+18}$ egész szám legyen.

Császár Sándor, Csíkszereda

125. feladat

Egy adott körön felvesszük egymástól egyforma távolságra az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ pontokat. Nevezzük elegáns trapéznek, azt az egyenlőszárú trapézt, amelynek szárai a nagyalap hosszával egyenlők.



- a) Hány különböző mértékű húrszöget, (kerületi szöget) képezhetünk az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{90}$ pontokkal? Ha $n = 90$ és $A_3 A_{90}$ egy elegáns trapéz kisalapja, határozzátok meg a trapéz nagyalapja és átlója által bezárt szög mértékét.
- b) Határozzuk meg az n legkisebb értékét, úgy, hogy az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ pontok három nem egybevágó elegáns trapézt határozzanak meg.

Császár Sándor, Csíkszereda

126. feladat

Burkus királynak 10088 katonája van, 777 osztagba elosztva. Minden osztagban 11-nél több katona szolgál. A király bármelyik osztagának katonáit szét tudja osztani a többi osztag között úgy, hogy a többi osztag azonos létszámúvá váljék. Milyen létszámú osztagok lehettek Burkus király seregében? Hány féle különböző felosztása lehetett az osztagoknak?

Császár Sándor, Csíkszereda

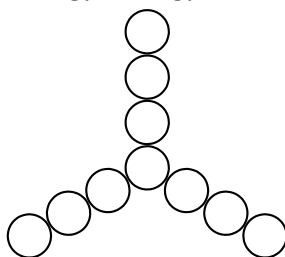
127. feladat

Legyen $p \geq 5$ egy prímszám. Bizonyítsa be, hogy 360 osztója a $(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$ szorzatnak!

Dr. Kántor Sándorné Debrecen

128. feladat

Írd be az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat a mellékelt „3-karú” ábra karikáiba úgy, hogy a három „karon” található 4-4 körbe írt szám összege egyenlő legyen 21-gyel.

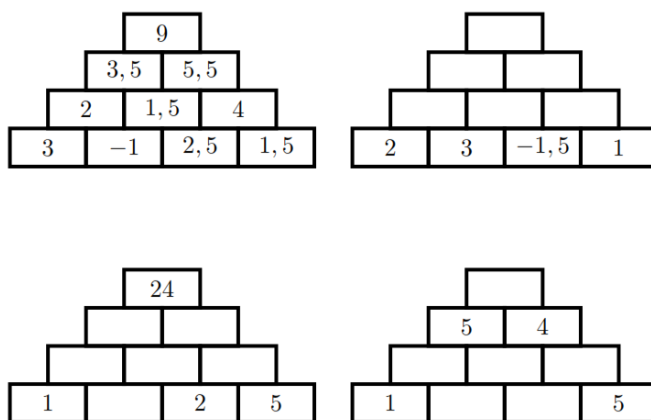


Hraskó András, Budapest

129. feladat

Összeadás piramisok

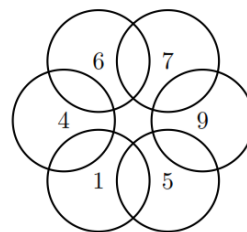
Az „összeadás piramis” mindegyik mezőjében az alatta levő két szám összege áll. Az egyik piramist ki is töltöttük. A csúcán látható 9 például épp $3,5+5,5$ és a kissé lejjebb található 1,5 is az alatta levő két szám összege: $1,5=(-1)+2,5$. Tölts ki a maradék három hiányos összeadás számpiramist!



Hraskó András, Budapest

130. feladat

Írd be az 1, 3, 5, 7, 8, 11 számokat a körök metszeteibe, úgy hogy az egy körben található három szám összege mindenhol ugyanaz a szám legyen.

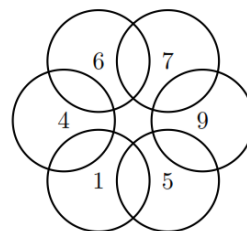


Hraskó András, Budapest

131. feladat

Hány olyan egész szám van 0-tól 1000-ig, amelyik 2 és 5 egyikével sem osztható?

Mennyi ezeknek az összege?



Hraskó András, Budapest

132. feladat

Hány megoldása van a természetes számok halmazán a következő egyenlőtlenségnek:

$$\frac{2015}{x-2014}$$

$$+ \frac{2014}{x-2015} \geq 2 ?$$

Nyitrai János, János Zsigmond Unitárius Kollégium, Kolozsvár