

1. Kati egy sorba hússzor egymás után, Laci egy másik sorba huszonöttször egymás után lerakta az $\boxed{N} \boxed{M} \boxed{M} \boxed{V} \boxed{2} \boxed{0} \boxed{2} \boxed{6}$ kártyákat, ebben a sorrendben. Ezután Kati a sorában minden betűkártyát kicserélt egy $\boxed{0}$ -s számkártyára, majd mindegyik kártya alá odaírta az azon a kártyán és az azzal közvetlenül szomszédos kártyákon szereplő számok összegét. Végül az így kapott számokat összeadta. Laci az ő sorában mindegyik betűkártyát kicserélte egy $\boxed{1}$ -es számkártyára, majd mindegyik kártya alá odaírta az azon a kártyán és az azzal közvetlenül szomszédos kártyákon szereplő számok szorzatát. Végül az így kapott számokat összeadta. Melyikük kapott nagyobb számot és mennyivel?
(Csordás Mihály, Kecskemét)

Megoldás:

Mindkét gyereknél nyolcasával ismétlődtek a leírt karakterek.

A csere után Katinál a 0; 0; 0; 0; 2; 0; 2; 6 számsor ismétlődött 20-szor.

Kati először a 0; 0; 0; 2; 2; 4; 8; 8 számokat írta le, amelyek összege:

$$0+0+0+2+2+4+8+8=24.$$

A következő 19 alkalommal a 6; 0; 0; 2; 2; 4; 8; 8 számokat írta le, amelyek összege:

$$6+0+0+2+2+4+8+8=30.$$

A Kati által leírt számok összege: $24+19 \cdot 30=594$.

A csere után Lacinál az 1; 1; 1; 1; 2; 0; 2; 6 számsor ismétlődött 25-ször.

Laci először az 1; 1; 1; 2; 0; 0; 0; 12 számokat írta le, amelyek összege:

$$1+1+1+2+0+0+0+12=17.$$

A következő 24 alkalommal a 6; 1; 1; 2; 0; 0; 0; 12 számokat írta le, amelyek összege:

$$6+1+1+2+0+0+0+12=22.$$

A Laci által leírt számok összege $17+24 \cdot 22=545$.

Az 594 nagyobb, mint az 545, így Kati kapott nagyobb számot, $594-545=49$ -cel.

2. Lizi a születésnapjára egy 2026 darabos pálcika készletet kapott. A pálcikákból a számjegyeket az ábrán látható módon rakja ki. (Például a 0-s számjegyet 6 db pálcikával, míg a 3-as számjegyet 5 db pálcikával tudja kirakni.)



a) Hány olyan legfeljebb kétjegyű pozitív egész szám van, amely egyenlő a kirakásához szükséges pálcikák számával?

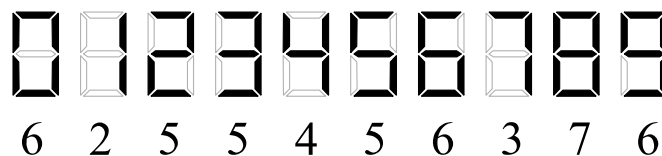
b) Melyik az a legnagyobb pozitív egész szám, amelyet Lizi 19 pálcikából tud kirakni?

c) Lizi kirakott egy háromjegyű pozitív egész számot, összeszorozta a számjegyekhez tartozó pálcikák számát és eredményül 30-at kapott. Hány darab ilyen tulajdonságú háromjegyű szám van?

(Fedorszki Ádám, Beregszász-Budapest)

Megoldás:

Mindegyik számjegy alá odaírjuk a kirakásához szükséges pálcikák darabszámát:



a) Megfelelő egyjegyű számok a 4, az 5 és a 6. Az egy számjegyhez használható pálcikák száma legfeljebb 7, így egy kétjegyű szám kirakásához legfeljebb $7+7=14$ pálcikát használhatunk, tehát elég a 10; 11; 12; 13; 14 számokat megvizsgálni. Ezek közül egyik sem felel meg a feltételeknek, így 3 darab ilyen szám van.

b) Két pozitív egész szám közül az a nagyobb, amelyik több számjegyből álló szám. Akkor lesz a legtöbb számjegy, ha a lehető legkevesebb pálcikából álló számokat használjuk. Mindegyik számjegy nem lehet 1-es, mert akkor a pálcikák száma páros lenne. Mivel $19=3+8 \cdot 2$, ezért a számban egy darab 7-es és nyolc darab 1-es van, és ezek közül a számok közül a 711 111 111 a legnagyobb.

c) Mivel $30=2 \cdot 3 \cdot 5$, így 2, 3 és 5 darab pálcikából kirakható számokat keresünk.

2 darab pálcikából csak az 1-es számjegy, 3 darab pálcikából csak a 7-es számjegy rakható ki.

5 darab pálcikából a 2-es, a 3-as és az 5-ös számjegy is kirakható, így a háromjegyű számokhoz az 1; 7; 2 vagy az 1; 7; 3 vagy az 1; 7; 5 számjegyeket használhatjuk. Három különböző számjegyből $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ darab háromjegyű számot írhatunk fel, így összesen $3 \cdot 6 = 18$ darab megfelelő háromjegyű szám van.

3. Hét szabályos dobókockából összeragasztunk egy testet úgy, hogy az egyik dobókocka mindegyik lapjához odaragasztunk egy-egy másik dobókockát. Az összeragasztott négyzetlapok tökéletesen fedik egymást. Hányféle értéket vehet fel az így kapott test lapjain látható pöttyök számának összege? (A szabályos dobókocka lapjai 1-től 6-ig pöttyözöttek, a szemközti lapokon a pöttyök számának összege 7.)

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

Megoldás:

A középső dobókockát teljesen eltakarja a többi, így annak egyik pöttye sem látszik. A maradék 6 darab „külső” dobókockának 1-1 lapja a ragasztás miatt nem látható. Egy dobókockán a pöttyök számának összege $3 \cdot 7 = 21$, tehát a 6 darab „külső” dobókockának összesen $6 \cdot 21 = 126$ pöttye van. A dobókockának egy oldalán legalább 1 és legfeljebb 6 pötty van, amely nem látható, így a ragasztásnál a „külső” kockáknak összesen legalább 6 és legfeljebb 36 pöttye nem látható.

A látható pöttyök száma így legalább $126 - 36 = 90$ és legfeljebb $126 - 6 = 120$.

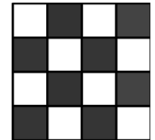
Lássuk be, hogy a két érték között minden egész szám lehetséges.

Induljunk ki abból, hogy minden külső kockának az 1-es lapját ragasztottuk a középsőhöz, így a látható pöttyök számának összege 120. Válasszuk ki az egyik kockát, és ragasszuk az 1-es lapja helyett a 2-es; 3-as; 4-es; 5-ös; 6-os lapját a középső kockához, így minden lépésben 1-gyel csökken a látható pöttyök száma. Folytassuk ezt az eljárást a többi „külső” kockával is, így a látható külső pöttyök számának összege minden lépésben 1-gyel csökken. Végül elérünk ahhoz az állapothoz, amelyben a látható pöttyök száma 90.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a 90 és 120 közé eső pöttyök száma is előállítható.

A pöttyök számának összege 90-től 120-ig bármely pozitív egész szám lehet, tehát 31-féle értéket vehet fel.

4. Az ábrán látható 4x4-es sakktábla mezőit szeretnénk átszínezni úgy, hogy minden mező színe fehér legyen. Egy lépésben kiválasztunk vagy egy sort, vagy egy oszlopot, és annak valamelyik általunk választott három mezőjét átszínezzük: a feketéket fehérre, a fehéréket feketére.



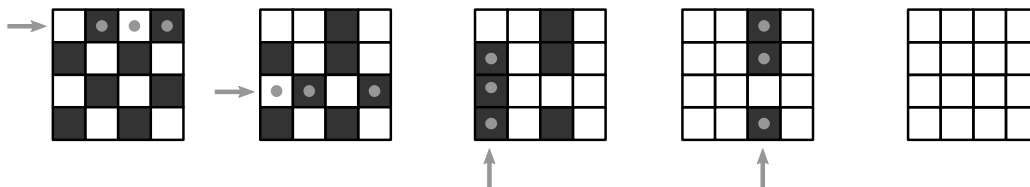
a) Adj meg egy, a lehető legkevesebb lépésből álló lépéssorozatot, amellyel elérhető, hogy mindegyik mező színe fehér legyen!

b) Bizonyítsd be, hogy ennél kevesebb lépésből nem lehet így fehérre színezni a 4x4-es sakktáblát!

(Ágó Krisztina, Újvidék)

Megoldás:

a) 4 lépésben megvalósítható a kért átszínezés, például az ábrán látható módon:



b) Lássuk be, hogy legalább 4 lépésre biztosan szükség van.

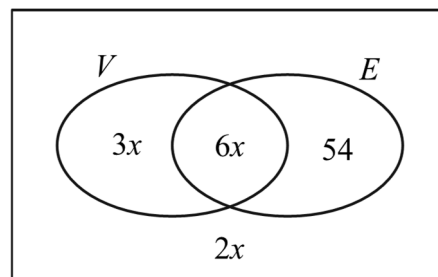
A fehérre színezéshez az átló mind a 4 fekete színű négyzetét át kell színezni. Ez a 4 mező különböző sorokban és különböző oszlopokban van, így egy lépésben közülük legfeljebb 1 mező színeztető át fehérre. Ahhoz, hogy mind a 4 fekete átlómezőt fehérre színezzük, legalább 4 lépésre van szükség. 4 lépés elegendő is, amit a feladat a) részének megoldásában megmutattunk.

5. Egy közvélemény-kutatás során megkérdezték ötödikes gyerekektől, hogy szeretik-e a vackort (vadkörtét), és hogy szeretik-e az egrest. A kérdésekre minden gyerek igennel vagy nemmel válaszolt. A válaszokból kiderült, hogy háromszor annyian vannak azok, akik mindkettőt szeretik, mint azok, akik egyiket sem. A megkérdezett gyerekek közül 54 nem szereti a vackort, de szereti az egrest. A vackort szerető gyerekek között kétszer annyian vannak azok, akik szeretik az egrest is, mint azok, akik csak a vackort szeretik. Ugyanannyian vannak azok, akik szeretik a vackort, mint azok, akik csak az egrest szeretik.
- Hány gyerek szereti a vackort és az egrest is?
 - Hány gyerek válaszolt mindkét kérdésre nemmel?
 - Hány gyereket kérdeztek meg összesen?

(Paróczay Eszter, Dunakeszi)

Első megoldás:

- Gondolkodjunk visszafelé. Ugyanannyian vannak azok, akik szeretik a vackort, mint azok, akik csak az egrest szeretik, így a vackort szerető gyerekek száma is 54 fő. A vackort szerető gyerekek közül kétszer annyian vannak azok, akik szeretik az egrest is, mint azok, akik csak a vackort, tehát $54 : 3 = 18$ olyan gyerek van, aki csak a vadkörtét szereti, és $2 \cdot 18 = 36$ az olyan gyerekek száma, akik a vackort és az egrest is szeretik.
- Háromszor annyian vannak azok, akik mindkettőt szeretik, mint azok, akik egyiket sem, tehát $36 : 3 = 12$ olyan gyerek van, aki egyiket sem szereti.
- Összesen $18 + 36 + 54 + 12 = 120$ gyereket kérdeztek meg.

Második megoldás:

Azoknak a gyerekek szám, akik csak az egrest szeretik, 54 fő, az egyik gyümölcsöt sem szerető gyerekek száma legyen $2x$. A mindkét gyümölcsöt szerető gyerekek száma háromszorosa az egyik gyümölcsöt sem szerető gyerekek számának, tehát $6x$, és azoknak a gyerekeknek a száma pedig, akik csak a vackort szeretik, fele a mindkét gyümölcsöt szerető gyerekek számának, vagyis $3x$. Ugyanannyian szeretik a vackort, mint ahányan csak az egrest, tehát $9x = 54$, ezért $x = 54 : 9 = 6$.

- Azoknak a száma, akik mindkét gyümölcsöt szeretik, $6x = 6 \cdot 6 = 36$.
 - Azoknak a száma, akik egyik gyümölcsöt sem szeretik, $2x = 2 \cdot 6 = 12$.
 - A megkérdezett gyerekek száma összesen $11x + 54 = 11 \cdot 6 + 54 = 120$.
6. Egy kocka lapjaira ráírtuk a 4; 5; 6; 7; 8 és 9 számokat. Mindegyik lapjára egy számot írtunk, és mindegyik számot egyszer használtuk fel. Ezután a kockával egy vízszintes asztalon egymás után kétszer dobtunk. Az első dobás után a kocka négy függőlegesen álló lapján lévő számok összege 28, a második dobás után a kocka négy függőlegesen álló lapján lévő számok összege 25 volt. Melyik szám látható azon a lapon, amelyikkel szemközti lapra az 5-ös számot írtuk?

Megoldás:

A kocka lapjaira írt számok összege $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$.

Az első dobás után a két vízszintesen álló lapon lévő számok összege $39 - 28 = 11$ volt.

$11 = 4 + 7 = 5 + 6$, így ezt a két esetet kell megvizsgálnunk.

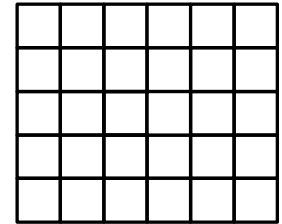
A második dobás után a két vízszintesen álló lapon lévő számok összege $39 - 25 = 14$ volt.

$14 = 5 + 9 = 6 + 8$, így ezt a két esetet kell összevetni az előző kettővel.

A $11 = 5 + 6$ eset nem lehetséges, hiszen akkor a 14-et sehogyan nem tudnánk előállítani, tehát a 4-es számmal szemben a 7-es szám áll. Ha az 5-ös számmal szemben a 9-es áll, akkor a 6-os számmal

szemben a 8-as áll, hiszen ez a kettő szám maradt ki. Ha a 6-os számmal szemben a 8-as szám áll, akkor a két kimaradó szám, az 5-ös és a 9-es szám áll egymással szemben, ami az előzővel megegyező megoldást ad. Tehát az 5-ös számmal szemben a 9-es szám áll.

7. Az ábrán látható 5×6 -os téglalapot feldaraboljuk 8 kisebb téglalagra a rácsvonalak mentén. Két téglalapot egyformának nevezünk, ha pontosan egymásra illeszthetők (egybevágók).

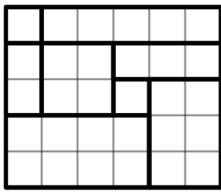


- a) Rajzolj le egy olyan feldarabolást, amelyben a keletkező 8 téglalap közül pontosan 2 egyforma van!
 b) Bizonyítsd be, hogy nem lehet elvégezni a feldarabolást úgy, hogy a keletkező 8 téglalap közül semelyik 2 ne legyen egyforma!

(Fedorszki Ádám, Beregszász-Budapest)

Megoldás:

- a) A feladatnak sok megoldása van, közülük egy látható az alábbi ábrán:



- b) A 8 legkisebb területű téglalap méretei a következők:
 1×1 ; 1×2 ; 1×3 ; 1×4 ; 2×2 ; 1×5 ; 1×6 ; 2×3

A 8 legkisebb területű téglalap területének az összege

$$1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 31 \text{ területegység.}$$

Az 5×6 -os téglalap területe 30 területegység. Még a 8 legkisebb, nem egyforma téglalap területének összege is nagyobb ennél. Ebből következik, hogy bármely 8, nem egyforma téglalap területének összege is nagyobb, mint az 5×6 -os téglalap területe, tehát az eredeti téglalapot nem lehet 8 darab különböző téglalagra feldarabolni.

8. Egy bábuval lépegetünk az ábrán látható táblán. Első lépésben a bábút feltesszük egy általunk választott mezőre. Ezt követően minden lépésben valamelyik olyan mezőre lépünk tovább, amelynek nincs közös pontja azzal a mezővel, amelyiken a bábu éppen akkor áll. (Például a 2-es mezőről nem léphetünk az 1; 3; 5; 6 mezőkre, de a többire igen.) Mindegyik mezőre csak egyszer léphetünk. Hány olyan különböző lépéssorozat van összesen, amelyekben mindegyik mezőre rálépünk?

1			
2	3	4	
5	6	7	8

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

Megoldás:

Megvizsgáljuk, melyik mezőről hányféle mezőre léphetünk.

A 3-as mezőről kizárólag a 8-as mezőre léphetünk, ezért a lépéssorozat vagy a 3-as mezőről indul, vagy ott fejeződik be. Minden lépéssorozatot megtehetünk fordított irányba haladva is, ezért elég összeszámolnunk azokat az útvonalakat, amelyek a 3-as mezőről indulnak, ahonnan az első lépéssel a 8-as mezőre lépünk. A 6-os mezőre csak a 8-asról vagy az 1-esről érkezhünk, ezért vizsgáljuk külön a két esetet.

1. eset: A 8-as mezőről a 6-os mezőre lépünk. Innen csak az 1-es mezőre léphetünk tovább. Az 1-es mezőről a 4-es, a 7-es vagy az 5-ös mezőre léphetünk. Mindegyikről kétféleképpen mehetünk tovább, így ebben az esetben 6 különböző lépéssorozatot találtunk:

$$3-8-6-1-4-2-7-5; \quad 3-8-6-1-4-5-7-2;$$

$$3-8-6-1-7-2-4-5; \quad 3-8-6-1-7-5-4-2;$$

$$3-8-6-1-5-7-2-4; \quad 3-8-6-1-5-4-2-7.$$

2. eset: A 8-as mezőről nem a 6-os mezőre lépünk. Ekkor azonban a 6-os mezőre csak az 1-es mezőről léphetünk, így ez csak az utolsó lépésünk lehet. A 8-as mezőről ezért csak a 2-es és az 5-ös mezőre léphetünk. Mindegyikről kétféleképpen mehetünk tovább, így ebben az esetben 4 különböző

lépéssorozatot találtunk:

$3-8-2-4-5-7-1-6$; $3-8-2-7-5-4-1-6$;

$3-8-5-7-2-4-1-6$; $3-8-5-4-2-7-1-6$.

Minden lépéssorozatot megtehetünk fordított irányba haladva is, így összesen $2 \cdot (6+4) = 20$ darab különböző lépéssorozat van.