1. A harmadikos Domának nem megy jól az összeadás. Ezért azt a szörnyű feladatot kapta a nyári szünetre, hogy készítsen egy hatalmas táblázatot, amelynek első oszlopában egymás alatt szerepelnek azok a négyjegyű pozitív egész számok 1001-től 9999-ig, amelyek nem oszthatók 10-zel. A táblázat második oszlopában minden sorban legyen az a négyjegyű szám, amelynek a számjegyei fordított sorrendben szerepelnek, mint az első oszlopban ugyanabban a sorban lévő szám számjegyei, a harmadik oszlopban pedig legyen a sor első két számának összege. A kitöltött táblázat egy részlete látható az ábrán.

1001	1001	2002
1002	2001	3003
⋮	⋮	⋮
5878	8785	14663
5879	9785	15664
⋮	⋮	⋮
9998	8999	18997
9999	9999	19998

a) Hány különböző szám szerepel a harmadik oszlopban?
b) Hány olyan különböző szám van a harmadik oszlopban, amelyik osztható 77-tel?

(Bencze Mihály, Brassó)

Megoldás: Legyen az első oszlopban lévő szám $\overline{abcd}$. Ekkor sem a, sem d nem lehet 0. A harmadik oszlopban lévő összegre alkalmazzuk a helyi érték szerinti bontást:

$$S=\overline{abcd}+\overline{dcba}=1000a+100b+10c+d+1000d+100c+10b+a=$$
$$=1001\cdot(a+d)+110\cdot(b+c).$$

a) Mivel $1\le a\le 9$ és $1\le d\le 9$, ezért $2\le a+d\le 18$, tehát az $a+d$ összeg 17-féle különböző értéket vehet fel. Hasonlóan igaz, hogy $0\le b\le 9$ és $0\le c\le 9$, ezért $0\le b+c\le 18$. Ezért $b+c$ összeg 19-féle különböző értéket vehet fel. Ha megválasztjuk az $a+d$ és a $b+c$ értékeket, akkor az meghatározza az S összeget. Lássuk be, hogy ha ezeket az értékeket különbözőféleképpen választjuk meg, akkor S összeg értéke is különböző lesz. Ha $a+d$ értékét csökkentem/növelem 1-gyel, akkor S összeg értéke 1001-gyel nő/csökken. $110\cdot(b+c)$ értéke nem tud 1001-gyel nőni/csökkenni, mert a szorzat osztható 10-zel. Ha pedig $a+d$ értékét legalább 2-vel csökkentem/növelem, akkor S összeg értéke legalább 2002-vel csökken/nő, és $110\cdot(b+c)$ értéke nem tud 2002-vel nőni/csökkenni, mert

$$110\cdot(b+c)\le 110\cdot 18=1980<2002.$$

A harmadik oszlopban $17\cdot 19=323$ különböző szám szerepel.

b) 1001 és 110 is osztható 11-gyel, így minden összeg osztható 11-gyel. Ahhoz, hogy 77-tel is osztható legyen, 7-tel is oszthatónak kell lennie. Az 1001 osztható 7-tel, ezért $a+d$ értékét tetszőlegesen megválaszthatjuk. Viszont a 110 nem osztható 7-tel, így az összeg pontosan akkor osztható 77-tel, ha $b+c$ osztható 7-tel. Ez háromféleképpen lehetséges: $b+c=0$; $b+c=7$ vagy $b+c=14$.
Vagyis $17\cdot 3=51$ különböző összeg van a harmadik oszlopban, amely osztható 77-tel.

2. A Bergengóc Ligában minden labdarúgó mérkőzés végén a győztes csapat 3 pontot kap, a vesztes csapat nem kap pontot, döntetlen esetén mindkét csapat 1 pontot kap. A Kukutyini Kakasok csapata 14 mérkőzésen úgy tudott 26 pontot gyűjteni, hogy összesen 7 gólt rúgtak és 3 gólt kaptak.
a) Hány mérkőzést nyertek meg a Kukutyini Kakasok?
b) Mennyi lett a végeredmény azon a mérkőzésükön, amelyiken a legtöbb gólt lőtte a két csapat összesen?

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

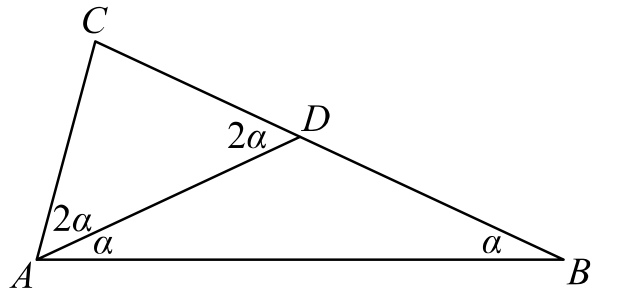
Megoldás:
A Kakasoknak van legalább 6 győzelme, hiszen 5 győzelem esetén még ha a többi 9 mérkőzés döntetlenül zárul, akkor is csak 24 pontot szerezhetnek. Nem lehet 9 vagy annál több győzelme a Kakasoknak, mert akkor legalább 27 pontjuk lenne. Tehát a győzelmeik száma 6; 7 vagy 8.
1. eset: 6 győzelmet szereztek. Ekkor szükség van még 8 döntetlenre, hogy az összpontszámuk 26 legyen. Ez nem lehetséges, mert ha nem kaptak ki, akkor a 8 döntetlen során ugyanannyi gól rúgtak, mint amennyit kaptak, a 6 győzelem során pedig legalább 1-1 góllal többet rúgtak, mint az ellenfél, ezért összesen legalább 6 góllal többet kellett volna rúgniuk, mint kapniuk, de csak 3-mal rúgtak többet, mint amennyit kaptak.

<u>2. eset:</u> 7 győzelmet szereztek. Ekkor pontosan 5 döntetlent játszottak és kétszer kaptak ki a Kakasok. Csak 7 gólt rúgtak, ezért csak úgy nyerhettek 7 meccset, ha mindegyiket 1:0-ra nyerték. Ezen kívül nem rúgtak gólt, így az 5 döntetlen csak 0:0 lehetett. A 3 kapott góllal kétszer kikaptak: egyszer 0:1, egyszer 0:2 lett az eredmény. Ez tehát lehetséges.
<u>3. eset:</u> 8 győzelmet szereztek. Ez nem lehetséges, hiszen minden győztes meccsen kell legalább egy gólt rúgni, de a Kakasok csak 7 gólt rúgtak.
Mivel csak egy eset lehetséges, ezért a Kakasok 7 mérkőzést nyertek meg, és a leggólgazdagabb mérkőzésük végeredménye 0:2.

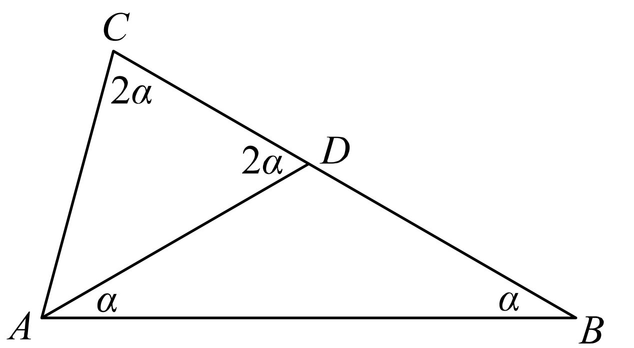
3. Az ABC háromszög A csúcsánál lévő belső szögének nagysága 75°. A háromszög BC oldalának van olyan D pontja, amelyre az ABD és az ACD háromszögek egyenlő szárúak. Hány fokosak lehetnek az ABC háromszög belső szögei?

(Szabó Magda, Szabadka)

Megoldás:
Az ABD és az ACD háromszögben is van legalább két-két szög, amelyek egyenlők. Nevezzük a folytatásban ezeket a szögeket *fontos* szögeknek.
A D-nél lévő két szög, az $BDA\sphericalangle$ és az $ADC\sphericalangle$ közül legfeljebb az egyik lehet fontos, mert közülük az egyik legalább 90°, és egy háromszögnek nem lehet két darab legalább 90°-os belső szöge.
A két szög közül az egyik fontos szög. Ha ugyanis nem lenne az, akkor $DAB\sphericalangle = ABD\sphericalangle$ és $CAD\sphericalangle = DCA\sphericalangle$ teljesülne, és mivel $CAD\sphericalangle + DAB\sphericalangle = 75°$, ezért a háromszög belső szögeinek összege 150° lenne, ami lehetetlen. Vagyis a két szög közül pontosan egy fontos, és szimmetria okokból feltehetjük, hogy ez az $ADC\sphericalangle$. A $BDA\sphericalangle$ nem fontos szög, ezért az ABD egyenlő szárú háromszögben a másik két belső szög fontos szög: $DAB\sphericalangle = ABD\sphericalangle = \alpha$. $ADC\sphericalangle = 2\alpha$, mert az ABD háromszög külső szöge. Így tehát két eset maradt az alapján, hogy az ACD egyenlő szárú háromszögben melyik belső szög egyenlő az $ADC\sphericalangle$-gel.
<u>1. eset:</u> $CAD\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 2\alpha$.



Az A csúcsnál lévő belső szög $CAD\sphericalangle + DAB\sphericalangle = 2\alpha + \alpha = 3\alpha = 75°$, így $\alpha = 25°$.
A háromszög belső szögei 75°; 25° és 80°.
<u>2. eset:</u> $DCA\sphericalangle = CAD\sphericalangle = 2\alpha$.



A háromszög belső szögeinek összege $75° + \alpha + 2\alpha = 180°$, tehát $\alpha = 35°$.
Ennek a háromszögnek a belső szögei 75°; 35° és 70°.
Az ABC háromszög belső szögeire két lehetőség van: 75°; 25°; 80° vagy 75°; 35°; 70°.

4. Laura készített az anyukájának egy születésnapi meglepetést, amit egy PIN-kóddal lezárt dobozba tett, és naponta adott egy-egy új információt a kódról. Hétfőn elárulta, hogy a kód egy négyjegyű pozitív egész szám. Kedden közölte, hogy a számnak 12-nél több osztója van. Szerdán megsúgta, hogy a páratlan osztók száma 7-nél kevesebb. Csütörtökön azt az információt adta, hogy a számnak 18-nál kevesebb osztója van. Pénteken ismét a páratlan osztók számát pontosította, elárulta, hogy 4-nél több páratlan osztója van a kódnak. Szombaton figyelmeztette az anyukáját, hogy ha háromszor rossz PIN-kódot ad meg, akkor a doboz zárolja magát és sosem jut hozzá a meglepetéshez. (A feladat szövegében az osztók mindig a pozitív osztókat jelentik.)
A Laura által megadott információk alapján biztosan ki lehet nyitni a dobozt?

(Juhász Péter, Budapest)

Megoldás:
A PIN-kódnak 5 vagy 6 páratlan osztója van. Írjuk fel a lehetséges PIN-kódot $N=2^k\cdot(2m+1)$ alakban. Ha a számnak az s páratlan szám osztója, akkor osztói a $2\cdot s; 2^2\cdot s; \dots ; 2^k\cdot s$ számok is. A szám összes osztóját fel tudjuk írni úgy, hogy vesszük a páratlan osztóit, és mindegyik mögé leírjuk az összes lehetséges 2-hatvány többszörösét. Ebből következik, hogy az összes osztók száma többszöröse a páratlan osztók számának, mégpedig a $(k+1)$-szerese.
Az összes osztók száma 12-nél több és 18-nál kevesebb, és többszöröse 5-nek vagy 6-nak, ezért a számnak pontosan 15 osztója van, ebből 5 páratlan, és $k+1=3,$ vagyis $k=2.$
Ha a páratlan prímosztók $p_1; p_2; \dots ; p_n,$ és $n\geq 3$ lenne, akkor a páratlan osztók száma 5-nél több lenne: $1; p_1; p_2;\ p_3; p_1\cdot p_2; p_1\cdot p_3; p_2\cdot p_3; \dots$
Ha $n=2,$ és mindegyik prím az első hatványon szerepel, akkor csak 4 páratlan osztója van a számnak: $1; p_1; p_2;\ p_1\cdot p_2.$
Ha $n=2,$ és az egyik prím, például a p_1 legalább a második hatványon szerepel, akkor pedig legalább 6 páratlan osztója van a számnak: $1; p_1; p_2;\ p_1^2; p_1\cdot p_2; p_1^2\cdot p_2.$
Azt kaptuk, hogy a számnak egyetlen páratlan prímosztója van, jelöljük ezt p-vel.
A számnak akkor lesz 5 páratlan osztója, akkor a p negyedik hatványon szerepel a prímtényezős felbontásban. A szám tehát $4\cdot p^4$ alakú, ahol p páratlan prím.
$4\cdot 3^4=324<1000$ és $4\cdot 11^4>4\cdot 10^4>10000,$ ezért p csak 5 vagy 7 lehet.
Laura anyukája tehát ki tudja nyitni a dobozt, ha kipróbálja a két lehetséges PIN-kódot,
a $4\cdot 5^4=2500$ és a $4\cdot 7^4=9604$ számokat.

5. Nevezzünk *csodás* számnak egy pozitív egész számot, ha bármely két szomszédos számjegyéből álló kétjegyű szám osztható 19-cel vagy 21-gyel. (A 7638 egy csodás szám, mert a 76 és a 38 osztható 19-cel, a 63 pedig osztható 21-gyel; a 7642 viszont nem csodás szám, mert bár a 76 osztható 19-cel, a 42 pedig 21-gyel, de a 64 sem 19-cel, sem 21-gyel nem osztható.)
Hány 2026-jegyű csodás szám létezik?

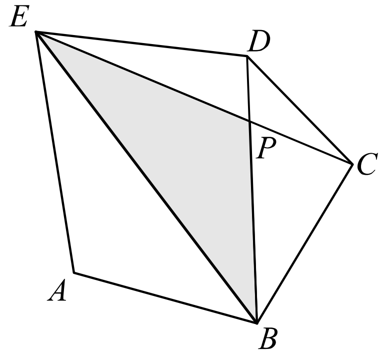
(Kekenák Tamás, Kassa)

Megoldás:
A 19-cel osztható számjegypárok a következők: 00; 19; 38; 57; 76; 95.
A 21-gyel oszthatók pedig: 00; 21; 42; 63; 84.
0 számjegy nem szerepelhet a számban, mert azt mindig csak 0 előzheti meg, így az első számjegy is 0 lenne, ami lehetetlen. A fennmaradó 9 számpár esetén az 1-től 9-ig terjedő számjegyek mindegyike pontosan egyszer szerepel a tízesek helyén és egyszer az egyesek helyén. Ez azt jelenti, hogy ha kiválasztunk egy adott számpárt, akkor az egyértelműen meghatározza, melyik pár következhet utána.
Vagyis az első számjegy meghatározza a teljes számot
Az első számjegy 9-féle lehet, így 9 különböző csodás szám létezik.

6. Igaz-e, hogy minden konvex ötszögben található három olyan átló, amelyekből mint szakaszokból háromszöget lehet szerkeszteni? Ha igen, akkor bizonyítsd be, ha nem, akkor mutass ellenpéldát!

(Szabó Magda, Szabadka)

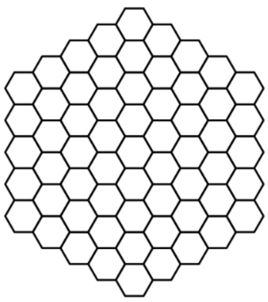
Megoldás:



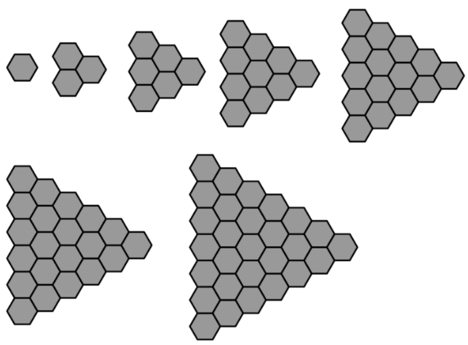
Legyen az *ABCDE* ötszög (egyik) leghosszabb átlója *BE.* Legyen a *BD* és a *CE* átló metszéspontja *P*. *P* mindkét átlónak belső pontja. A háromszög-egyenlőtlenség miatt $BE < BP + EP < BD + CE.$ Emiatt a *BD, CE* és *BE* átlókból, mint szakaszokból háromszög szerkeszthető, hiszen a leghosszabb oldal rövidebb, mint a másik két oldal összege. A válasz tehát igen, minden konvex ötszögnek van három olyan átlója, amelyekből háromszög szerkeszthető.

7. Az 1. ábrán látható hatszögrács táblára Áron és Bori felváltva helyez el a 2. ábrán látható szürke darabokat, minden lépésben egyet. A darabok elforgathatók, mindegyikből 100 darab áll rendelkezésre. A darabok még részben sem fedhetik egymást és nem lóghatnak le a tábláról. Az a játékos nyer, aki utoljára tud elhelyezni szürke darabot a táblára. A játékot Áron kezdte, és első lépésében a 3. ábrán látható szürke darabot tette a táblára.
Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Hogyan játsszon, hogy biztosan nyerjen?

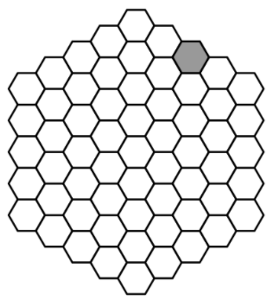
(Vistan Laura, Kassa)



1. ábra

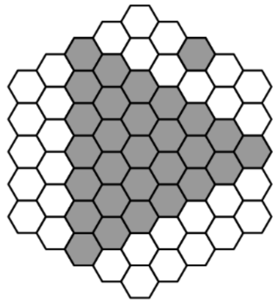


2. ábra



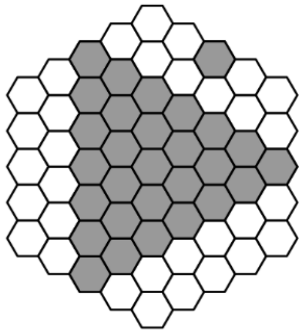
3. ábra

Megoldás:
A tábla $5+6+7+8+9+8+7+6+5=61$ hatszögből áll. Ha Bori a legnagyobb szürke elemet az ábrán látható módon helyezi el a táblán, akkor az 28 mezőt fed le, Áron első darabjával együtt 29-et.

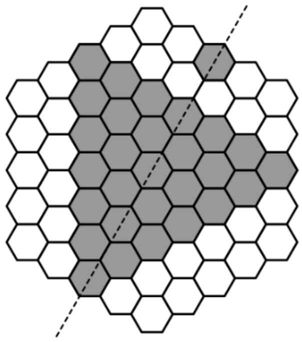


Vagyis 32 mező marad üresen, azaz páros számú mező. A kimaradó helyekre már csak a két legkisebb darab helyezhető el, amelyek 1 vagy 3 hatszöget fednek le, tehát páratlan sok mezőt. Áron minden lépése után páratlan sok, Bori minden lépése után páros sok üres mező marad a táblán. Borinak csak arra kell figyelnie, hogy megengedett lépést tegyen, akárhogyan játszhat ettől kezdve, ha az a szabályoknak megfelel. A végén elfogynak a mezők, vagyis valakinek a lépése után 0 szabad mező lesz, és ez csak Bori lehet, hiszen a 0 páros szám. Vagyis Borinak van nyerő stratégiája.

Második megoldás:
Helyezzen el Bori a legnagyobb szürke elemet az alábbi ábrán látható módon.



Ezt követően pedig Áron minden lépését tükrözze az alábbi ábrán látható tükörtengelyre.

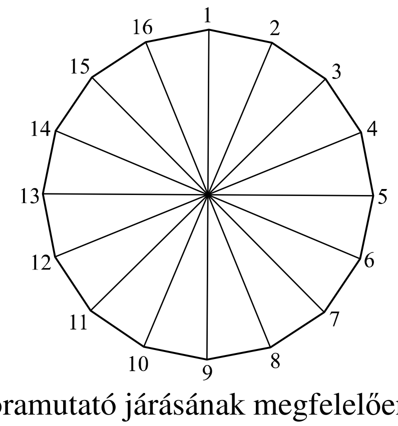


Ezt mindig meg tudja tenni, mert a szabadon maradó rész szimmetrikus a tengelyre, és Áron nem tud elhelyezni olyan darabot a táblán, ami metszi a tengelyt. Bori Áron minden lépésére tud válaszolni, így Borinak van nyerő startégiája.

8. Az iskola udvarán 16 gyerek körbeállt. Mindegyiküknek 3 barátja volt a többi 15 gyerek között: a két szomszédja, illetve a vele szemben álló gyerek. Hányféleképpen lehet a 16 gyereket 8 párba beosztani úgy, hogy mindenkinek az egyik barátja legyen a párja?

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

Megoldás:



Számozzuk meg a gyerekeket az óramutató járásának megfelelően, 1-től 16-ig. Az 1-gyel szemben a 9 áll, a 2-vel szemben a 10, és így tovább. Nevezzük ezeket a párokat átlónak, és az átlókra hivatkozzunk az abban álló gyerekek közül a kisebb sorszámúval (1.; 2.; …; 7.; 8. átló). Csoportosítsuk az eseteket aszerint, hogy hány átlót választunk ki.
Ha nem választunk ki egy átlót sem, akkor mindenkit a szomszédjával párosítunk, erre 2 lehetőség van: 1 párja 2 vagy 16 lehet, innentől már egyértelmű a párosítás.
Nem lehet a kiválasztott átlók száma 1, mert annak mindkét oldalán 7-7 gyerek áll, őket nem lehet párosítani.
Ha 2 átlót választunk, akkor két kiválasztott átlóban álló gyerek között páros sok gyereknek kell

állnia, vagyis a két átló paritása különböző. 4 páros és 4 páratlan átló van, ezeket egymástól függetlenül választhatjuk ki, így a lehetőségek száma $4 \cdot 4 = 16$.
Nem választhatunk 3 átlót, mert az első átló behúzása után annak egyik oldalán 7 gyerek marad, közülük a másik 2 átlóban még 2-t felhasználunk. A megmaradt 5 gyerekből viszont nem alkothatók szomszéd-párok. Hasonlóan nem lehet az átlók száma sem 5, sem 7.
Nézzük azt az esetet, ha 4 átlót választunk ki. Ez azt jelenti, hogy 2 szomszédos átlópárt nem választunk ki, ez a 8 gyerek alkot szomszéd-párokat. Vizsgáljuk azt, hogy a 2 ki nem választott átlópár között hány kiválasztott átló van.
Lehet, hogy ez 4 szomszédos ki nem választott átló, erre 8 eset van (attól függően, hogy melyik a legkisebb előforduló sorszám).
Lehet a két ki nem választott átlópár között 1 kiválasztott átló (másik oldalról pedig 3), ez szintén 8 eset, hiszen meghatározza, hogy mi az egyetlen kiválasztott közrezárt átló.
Lehet a ki nem választott átlópárok között 2-2 kiválasztott átló, ez szimmetriaokokból 4 eset (meghatározza, ha nem választom az 1.-2.; 2.-3.; 3.-4. vagy 4.-5. átlópárokat).
Vagyis ekkor összesen $8+8+4=20$ esetet találtunk.
Ha 6 átlót választunk ki, akkor a két ki nem választott átló szomszédos, ezeket 8 különböző módon választhatjuk ki.
8 átlót 1-féleképpen választhatunk.
Tehát az összes megfelelő párosítás száma: $2+16+20+8+1=47$.