

1. Matematika szakkörös diákok buszos kirándulásra mentek Lakiból Telekre. A két város egy főút mellett, egy-egy kilométerkőnél fekszik. Az út menti kilométerkövek számozása a fővárosban található 0 kilométerkőnél kezdődik, és ahogy a nevükben szerepel, az egész számú kilométereket jelzik. A buszsofőr a 180-as kilométerkőnél közölte a társasággal, hogy a még hátralévő út négyszer akkora, mint az eddig megtett út. Később a 123-as kilométerkőnél azt mondta, hogy a hátralévő út már csak ötödannyi, mint az eddig megtett út. Hányas számú kilométerkőnél van Laki és hányasnál Telek?

(Egyed László, Baja)

Első megoldás:

Ha Lakitól a 180-as kilométerkőig megtett távolság x km, akkor Telekig $4x$ km út van még hátra. Ha Lakitól a 123-as kilométerkőig megtett távolság $5y$ km, akkor Telekig még y km út van hátra. Laki és Telek távolsága egyrészt $5x$ km, másrészt $6y$ km, tehát $5x = 6y$, ezért $x = \frac{6}{5}y$. Lakitól a 180-as

kilométerkőig megtettek $\frac{6}{5}y$ kilométert, aztán 180-as és a 123-as kilométerkő között 57 kilométert, végül a 123-as kilométerkőtől Telekig y kilométert, ezért felírható a következő egyenlet:

$$\frac{6}{5}y + 57 + y = 6y.$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $y = 15$ (km).

Lakitól a 180-as kilométerkőig $x = \frac{6}{5} \cdot 15 = 18$ kilométert tettek meg, ezért Laki a $180 + 18 = 198$ -as kilométerkőnél van. A 123-as kilométerkőtől Telekig $y = 15$ kilométert tettek meg, ezért Telek a $123 - 15 = 108$ -as kilométerkőnél van.

Második megoldás:

A 180-as kilométerkő a Laki és Telek közti távolságot 1:4 arányban osztja, ezért Laki és a 180-as kilométerkő távolsága a két város közti távolság $\frac{1}{5}$ része. A 123-as kilométerkő a Laki és Telek közti távolságot 5:1 arányban osztja, ezért a 123-as kilométerkő és Telek távolsága a két város közti távolság $\frac{1}{6}$ része. A 180-as és 123-as kilométerkő közti 57 km távolság $1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{19}{30}$ része a Laki és

Telek közti távolságnak. Ha a távolság $\frac{19}{30}$ része 57 km, akkor $\frac{1}{30}$ része $57 : 19 = 3$ km, tehát Laki és

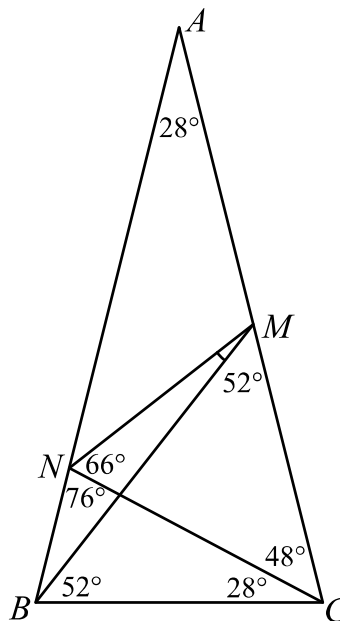
Telek távolsága $30 \cdot 3 = 90$ km. Lakitól a 180-as kilométerkőig $90 \cdot \frac{1}{5} = 18$ kilométert tettek meg, ezért

Laki a $180 + 18 = 198$ -as kilométerkőnél van. A 123-as kilométerkőtől Telekig $90 \cdot \frac{1}{6} = 15$ kilométert tettek meg, ezért Telek a $123 - 15 = 108$ -as kilométerkőnél van.

2. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB és AC oldala egyenlő hosszúságú, és a háromszög A csúcánál lévő belső szögének nagysága 28° . Az AC oldalon kijelöljük az M pontot, az AB oldalon pedig az N pontot úgy, hogy $MBC\angle = 52^\circ$ és $BCN\angle = 28^\circ$. Hány fokos az BMN szög?

(Kovács Béla, Szatmárnémeti)

Megoldás:



Készítsünk ábrát, és használjuk az ábra jelöléseit.

Az ABC háromszög alapon fekvő szögei $ABC\angle = BCA\angle = \frac{180^\circ - 28^\circ}{2} = 76^\circ$.

BCN háromszögben $CNB\angle = 180^\circ - 28^\circ - 76^\circ = 76^\circ$,

ezért a BCN háromszög egyenlő szárú, így $BC = CN$. (1)

BCM háromszögben $CMB\angle = 180^\circ - 52^\circ - 76^\circ = 52^\circ$,

ezért a BCM háromszög is egyenlő szárú, így $BC = CM$. (2)

A CMN háromszög is egyenlő szárú, mert (1) és (2) miatt $CN = CM$,

szárszöge $NCM\angle = 76^\circ - 28^\circ = 48^\circ$,

alapon fekvő szögei pedig $MNC\angle = CMN\angle = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 66^\circ$.

$BMN\angle = CMN\angle - CMB\angle = 66^\circ - 52^\circ = 14^\circ$.

3. Nevezzünk egy prímszámot *csodaprímnek*, ha az első és az utolsó számjegyét felcserélve a kétszeresénél 1-gyel kisebb számot kapunk.

a) Melyek a háromjegyű csodaprímek?

b) Bizonyítsd be, hogy nincs tízjegyű csodaprím!

(Barta Zágoni Csongor, Marosvásárhely-Budapest)

Megoldás:

a) A szám kétszeresénél 1-gyel kisebb szám háromjegyű, ezért az eredeti szám első számjegye legfeljebb 5 lehet. A szám első számjegye nem lehet páros, mert ha ezt a páros számjegyet a szám végére írjuk, akkor páros számot kapunk, holott a szám kétszeresénél 1-gyel kisebb szám páratlan.

Ha a szám első számjegye 5, akkor csak úgy lehet a szám kétszeresénél 1-gyel kisebb szám háromjegyű, ha ez a szám az 500, ekkor a másik szám a 999, de ez nem felel meg a feladat feltételeinek. A szám első számjegye csak 1 vagy 3 lehet.

Ha a szám első számjegye 1, akkor utolsó számjegye 1 vagy 6 lehet. A 6 kizárható, mert háromjegyű prímszám nem lehet páros. De 1 sem lehet, hiszen a szám kétszeresénél 1-gyel kisebb szám első

sámjegye legalább 2. A szám első számjegye nem lehet 1 sem.

Ha a szám első számjegye 3, akkor utolsó számjegye 2 vagy 7 lehet. A 2 kizárható, mert háromjegyű prímszám nem lehet páros. Egy lehetőség maradt, ha az eredeti szám a $\overline{3x7}$, kétszeresénél 1-gyel kisebb szám a $\overline{7x3}$, ekkor a helyi érték szerinti bontást elvégezve felírható a következő egyenlet:

$$2 \cdot (300 + 10x + 7) - 1 = 700 + 10x + 3.$$

A zárójel felbontása és összevonás után

$$613 + 20x = 703 + 10x.$$

Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy $x = 9$.

Az így kapott háromjegyű szám a 397, amely prímszám így megfelel a feladat feltételeinek.

Az egyetlen háromjegyű csodaprím a 397.

b) Az a) részben elmondottak alapján, ha van 10 jegyű csodaprím, akkor annak első számjegye 3, utolsó számjegye 7. Legyen k az ezen két számjegy között található 8 számjegyből álló nyolcjegyű szám. A helyi érték szerinti bontást elvégezve felírható a következő egyenlet:

$$2 \cdot (3000000000 + 10k + 7) - 1 = 7000000000 + 10k + 3.$$

Az egyenletet megoldva azt kapjuk, hogy $k = 99999999$, tehát az egyetlen lehetséges tízjegyű csodaprím a 3999999997.

Ez a szám azonban nem prímszám, mert osztható 7-tel: $3999999997 : 7 = 571428571$.

Ezzel beláttuk, hogy nincs tízjegyű csodaprím.

Megjegyzés:

A 7-tel való oszthatóság többféleképpen bizonyítható. Két további lehetőséget mutatunk erre.

1) $399 = 350 + 49$ osztható 7-tel, $999999 = 999 \cdot 1001$ is osztható 7-tel, mert $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Ez a bizonyítás lehetőséget ad általánosításra: nincs $(6n + 4)$ -jegyű csodaprím, ha n természetes számot jelöl.

2) $3999999997 = 4 \cdot 10^9 - 3$. A 10 hatványok 7-es maradékai hatosával ismétlődnek: 3; 2; 6; 4; 5; 1. A 10^9 hatvány 7-es maradéka ezért 6, és $4 \cdot 6 - 3 = 21$ osztható 7-tel, így $4 \cdot 10^9 - 3$ is osztható 7-tel. Ez a bizonyítás is lehetőséget ad az 1)-es pontban kimondott általánosításra.

4. Egy kvízesten 8 versenyző vett részt. Egy fordulóban mindig 3 versenyző lépett oda a nyomógombhoz, és küzdött meg egymással. Nem volt 2 olyan versenyző, akik egynél több fordulóban versenyeztek volna egymás ellen. Hány fordulóra került sor, ha a fordulók száma a lehető legtöbb volt?

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

Megoldás:

Egy versenyző mindegyik fordulóban 2-2 különböző ellenfél ellen versenyzett. Az ellenfelek száma 7 volt, ezért minden versenyző legfeljebb 3 fordulóban vett részt. 8 versenyző volt, ezért összesen legfeljebb $8 \cdot 3 = 24$ alkalommal fordult elő, hogy egy versenyző odaállt valamelyik nyomógombhoz. Mivel egy fordulóban 3 versenyző vett részt, ezért a fordulók száma legfeljebb $24 : 3 = 8$ lehetett.

A 8 forduló megvalósítható. Jelöljük a versenyzőket számokkal 1-től 8-ig, akkor az egyes fordulók versenyzői lehetnek: 123; 345; 567; 781; 146; 582; 863; 742.

A kvízesten 8 fordulóra került sor.

Megjegyzés:

A feladat, és vele együtt a megoldás is megfogalmazható a gráfok nyelvén: Maximum hány olyan háromszög van egy 8 csúcsú teljes gráfban, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös éle?

Egy lehetséges bizonyítás arra, hogy a fordulók száma nem lehet 9-nél több: A 8 csúcsú teljes gráf éleinek száma 28, ezért a háromszögek száma nem lehet 9-nél több, mert $9 \cdot 3 < 28 < 10 \cdot 3$.

5. Peti leírta egy lapra az összes olyan legfeljebb hétjegyű pozitív páratlan számot, amelyben a számjegyek szorzata és összege egyaránt 12.
- Melyik a Peti által leírt legnagyobb szám?
 - Melyik a Peti által leírt legkisebb szám?
 - Hány számot írt le a lapra Peti?

(Császár Sándor, Csíkszereda)

Megoldás:

$12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, ezért három eset lehetséges.

A 2 és a 6 számjegyek összege 8, ezekhez még 4 darab 1-es számjegyet kell hozzátenni, hogy a számjegyek összege is 12 legyen, a 6 számjegy: 1; 1; 1; 1; 2; 6.

A 3 és a 4 számjegyek összege 7, ezekhez még 5 darab 1-es számjegyet kell hozzátenni, hogy a számjegyek összege is 12 legyen, a 7 számjegy: 1; 1; 1; 1; 1; 3; 4.

A 2, a 2 és a 3 számjegyek összege 7, ezekhez még 5 darab 1-es számjegyet kellene hozzátenni, hogy a számjegyek összege is 12 legyen, ez azonban már 8 számjegy lenne, ami nem felel meg a feladat feltételeinek.

a) A legnagyobb szám hétjegyű, és a legnagyobb helyi értékekre kell elhelyezni a legnagyobb számjegyeket, ezért ez a szám a 4311111. Ez a szám páratlan, mert utolsó számjegye 1, ezért megfelel a feladat feltételeinek.

b) A legkisebb szám hatjegyű, és a legkisebb helyi értékekre kell elhelyezni a legnagyobb számjegyeket. A szám páratlan, ezért utolsó számjegye nem lehet 2 vagy 6.

A Peti által leírt legkisebb szám a 111261.

c) Ha a számjegyek az 1; 1; 1; 1; 2 és 6, akkor az utolsó helyre 1-est kell írni, hogy a szám páratlan legyen, a 2-est 5 helyi értékre, a 6-ost 4 helyi értékre írhatjuk, ezért a lehetőségek száma $5 \cdot 4 = 20$.

Ha a számjegyek az 1; 1; 1; 1; 1; 3 és 4, akkor az utolsó helyre 1-est vagy 3-ast kell írni, hogy a szám páratlan legyen.

Ha az utolsó helyre 1-est írunk, akkor a 3-ast 6 helyi értékre, a 4-est 5 helyi értékre írhatjuk, ezért a lehetőségek száma $6 \cdot 5 = 30$.

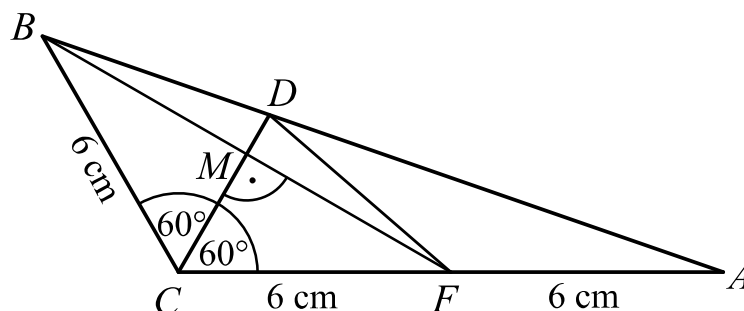
Ha az utolsó helyre 3-ast írunk, akkor a 4-es 6-féle helyi értékre írhatjuk, ez újabb 6 eset.

Peti összesen $20 + 30 + 6 = 56$ számot írt le.

6. Az ABC háromszög C csúcsnál lévő belső szögének nagysága 120° , AC oldala 12 cm, BC oldala 6 cm hosszú. A 120° -os szög szögfelezője az AB oldalt a D pontban metszi. Hány centiméter hosszú a CD szakasz?

(Vistan Laura, Kassa)

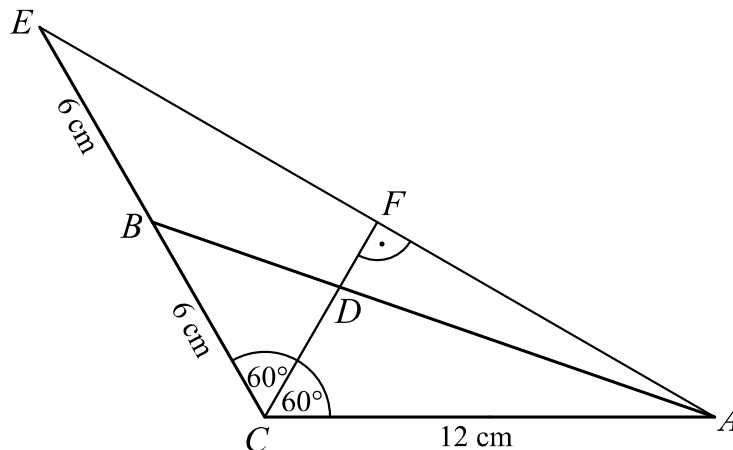
Első megoldás:



Tükrözzük tengelyesen a BCD háromszöget a CD szögfelezőre. A B pont képe a szög másik száraára illeszkedik, nevezzük ezt a pontot F -nek. A tükrözés távolságtartó, ezért $CF = BC = 6$ cm, ezért F az AC szakasz felezőpontja. $BCFD$ négyszög deltoid, egyik átlója CD , másik átlója FB , és ezek merőlegesek egymásra. Az átlók metszéspontja legyen M . MBC háromszög egy félszabályos háromszög, mert C -nél 60° -os, M -nél pedig 90° -os szöge van, ezért CM oldalának hossza fele a BC oldal hosszának, azaz $CM = 3$ cm. BCD háromszög a tükrözés miatt egybevágó CFD háromszöggel, tehát területük egyenlő. CAD háromszögben DF súlyvonal, tehát CAD háromszög területét felezi, tehát a CFD és az FAD háromszögek területe egyenlő. BCD , CFD és FAD háromszögek területe egyenlő, ezért a

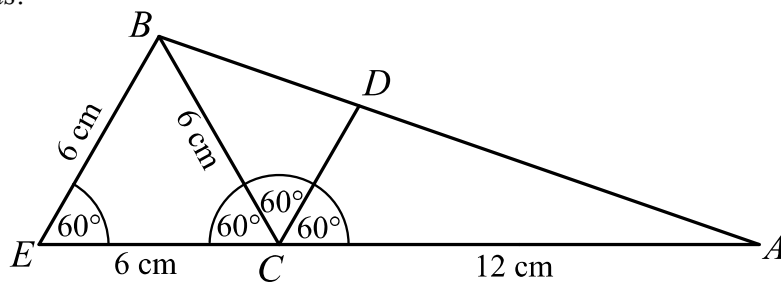
$BCFD$ deltoid területe $\frac{2}{3}$ része az ABC háromszög területének. Az ABC háromszögben BF súlyvonal, felezi a háromszög területét, ezért BCF háromszög területe fele az ABC háromszög területének. A DBF háromszög területe egyenlő a $BCFD$ deltoid és a BCF háromszög területének különbségével, tehát az ABC háromszög területének $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ része. DBF és BCF háromszögek területének aránya 1:3, a BF oldaluk közös, ezért az ehhez tartozó magasságok aránya is 1:3. Mivel $CM = 3$ cm, ezért $MD = 1$ cm. A CD szakasz hossza 4 cm.

Második megoldás:



Vegyük fel az E pontot a BC oldal B -n túli meghosszabbításán, a B -től 6 cm távolságra. Legyen a CD szögfelező egyenesének és az AE szakasznak a metszéspontja F . AEC háromszög egyenlő szárú, mert $AE = AC = 12$ cm, ezért szárszögének CF szögfelezője merőleges az AE alapra. AFC háromszög egy félszabályos háromszög, mert C -nél 60° -os, F -nél pedig 90° -os szöge van, ezért CF oldalának hossza fele az AC oldal hosszának, tehát $CF = 6$ cm. F pont az AE szakasz felezőpontja, ezért CF szakasz az AEC háromszög súlyvonala. B pont az CE szakasz felezőpontja, ezért AB szakasz az AEC háromszög súlyvonala. CF és AB súlyvonalak metszéspontja a D pont, tehát D az AEC háromszög súlypontja. A háromszög súlypontja a súlyvonalakat 1:2 arányban osztja, ezért CD szakasz hossza a CF szakasz hosszának a $\frac{2}{3}$ része. A CD szakasz hossza 4 cm.

Harmadik megoldás:



Vegyük fel az E pontot az AC oldal C -n túli meghosszabbításán, a C -től 6 cm távolságra. A BEC háromszögben $\angle ECB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, továbbá $EC = BC = 6$ cm, ezért BEC háromszög szabályos. Ebből következik, hogy $BE = 6$ cm, és $\angle BEC = 60^\circ$. Az ADC és az ABE háromszögek A csúcsnál lévő belső szöge közös szög, és $\angle DCA = \angle BEC = 60^\circ$, ezért a két háromszög hasonló. Hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő: $\frac{CD}{12} = \frac{6}{18}$. A CD szakasz hossza 4 cm.

7. Hányféleképpen lehet hézagmentesen lefedni az ábrán látható 4×4 -es táblát 8 darab 1×2 -es dominóval?

(Két lefedés különböző, ha valamelyik két számozott mezőt az egyik lefedésben egy dominó fed le, a másik lefedésben pedig két dominó egy-egy fele.)

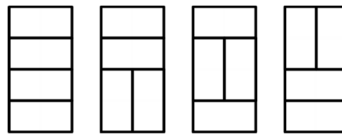
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(Erdős Gábor, Nagykanizsa)

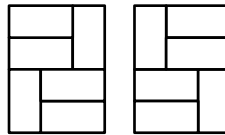
Első megoldás:

Jelölje l_n a $4 \times n$ -es tábla lehetséges lefedéseinek a számát. egy 4×1 -es táblát csak egyféleképpen lehet lefedni két álló helyzetű dominóval, ezért $l_1 = 1$. A folytatásban csoportosítsuk az eseteket annak megfelelően, hogy hányadik oszlop után lehet először kettévágni a táblát úgy, hogy nem vágunk el egy dominót sem. Ezt a folytatásban röviden csak úgy mondjuk, hogy ott lehet vágni.

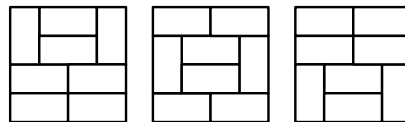
Ha az oszlopok száma 2, és a két oszlop között lehet vágni, akkor az első oszlopot 1-féleképpen lehet lefedni, a vágás utáni oszlop lefedésére $l_1 = 1$ lehetőség van, ez eddig $1 \cdot l_1 = 1$ lehetőség. Ezen kívül még az alábbi ábrán látható 4 olyan lefedés van, amikor nem lehet vágni, tehát $l_2 = 1 \cdot l_1 + 4 = 5$.



Legyen most az oszlopok száma 3. Ha az első után lehet elvágni, akkor az első oszlop 1-féleképpen fedhető le, utána 2 oszlop marad, ami pedig l_2 -féleképpen fedhető le. Ha a második után lehet vágni, akkor az első két oszlop, ahogy az előző ábrán láttuk, 4-féleképpen fedhető le, utána 1 oszlop marad, ami pedig l_1 -féleképpen fedhető le, és van még 2 olyan lehetőség, amikor egyik oszlop után sem lehet vágni, ez látható az alábbi ábrán. Ezek szerint $l_3 = 1 \cdot l_2 + 4 \cdot l_1 + 2 = 5 + 4 + 2 = 11$.



Ha az oszlopok száma 4, akkor ha az első, második vagy harmadik oszlop után lehet vágni, akkor a vágás előtt rendre 1; 4; 2 lehetséges lefedés van, utána pedig rendre l_3 ; l_2 ; l_1 a lehetséges lefedések száma, és van még 3 olyan lehetőség, amikor egyik oszlop után sem lehet vágni, ez látható az alábbi ábrán. Ezek szerint $l_4 = 1 \cdot l_3 + 4 \cdot l_2 + 2 \cdot l_1 + 3 = 11 + 20 + 2 + 3 = 36$.

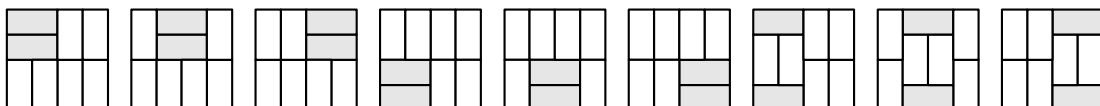


A táblát 36 különböző módon lehet lefedni dominókkal.

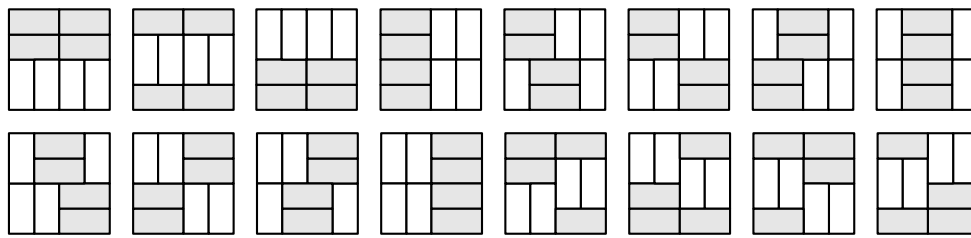
Második megoldás:

Csoportosítsuk a lefedéseket a vízszintes dominók száma szerint.

Ha a vízszintes dominók száma 0, akkor a lefedések száma 1. A vízszintes dominók száma nem lehet 1, mert amelyik oszlopokból lefed 1-1 mezőt, azokban az oszlopokban 3-3 mezőt kellene lefedni függőleges dominókkal, ami lehetetlen. Hasonlóan nem lehet a vízszintes dominók száma más páratlan szám sem. Minden vízszintes dominónak kell, hogy legyen ugyanis egy párja, amelyik ugyanabban a két oszlopban fed le 1-1 mezőt, különben ezekben az oszlopokban az üres mezők száma páratlan lenne, így nem lehetne őket lefedni függőleges dominókkal. Ha a vízszintes dominók száma 2, akkor az előbb elmondottak miatt ezeket úgy kell elhelyezni, hogy ugyanabból a 2 oszlopból fedjenek le 2-2 mezőt, és a megmaradó két mező közvetlenül egymás alatt legyen. Erre 9 lehetőség van, ezek láthatók az alábbi ábrán.



A dominópárokról elmondottaknak akkor is teljesülniük kell, ha a vízszintes dominók száma 4. Ebben az esetben a lehetséges lefedések száma 16, ezek láthatók az alábbi ábrán.



Ha a vízszintes dominók száma 6, akkor a függőleges dominók száma 2, ezért ebben az esetben a lefedések száma ugyanannyi, mint amikor a vízszintes dominók száma 2, tehát 9 ilyen lefedés van.

Ha a vízszintes dominók száma 8, akkor a lefedések száma 1.

Az összes lefedések száma $1+9+16+9+1=36$.

8. A Nemzetközi Magyar Matematikaversenyen öt régió – Délvidék, Erdély, Felvidék, Kárpátalja, Magyarország – tanulói vesznek részt. A nyolcadik évfolyamon 60 tanuló versenyez. Bármely 10 nyolcadik osztályos versenyző között van 3, akik egy régióból érkeztek. Bizonyítsd be, hogy a nyolcadik évfolyam versenyzői között van legalább 15, akik egy régióból valók!

(Fedorszki Ádám, Beregszász-Budapest)

Első megoldás:

Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy egyik régióból sem érkezett 15 vagy több nyolcadik osztályos. Ez azt jelenti, hogy mindegyik régióból legfeljebb 14 gyerek érkezett.

Mivel $4 \cdot 14 = 56 < 60$, ezért ez csak úgy lehetséges, ha mind az öt régióból érkezett legalább 4 nyolcadik osztályos versenyző. Ha mind az 5 régióból kiválasztunk 2-2 nyolcadik osztályost, akkor ebben a 10 fős csoportban nem lesz 3 olyan versenyző, akik közös régióból valók. Nem teljesülnek a feladat feltételei, tehát ellentmondáshoz jutottunk. Indirekt feltevésünk hamisnak bizonyult.

Van olyan régió, ahonnan legalább 15 nyolcadik osztályos versenyző érkezett.

Második megoldás:

Ha mind az öt régióból érkezett volna legalább 2 nyolcadik osztályos, akkor mindegyik régióból kiválasztva 2-2 versenyzőt, egy olyan 10 fős csoportot kapnánk, amelyre nem teljesülnének a feladat feltételei, mert nem lenne a 10 gyerek között 3 olyan, akik közös régióból érkeztek. Ez azt jelenti, hogy az egyik régióból legfeljebb 1 nyolcadik osztályos érkezett, a másik 4 régióból pedig összesen legalább 59 nyolcadik osztályos. A skatulyaelv alapján a 4 régió között van legalább egy olyan, ahonnan legalább 15 nyolcadik osztályos érkezett, mert $4 \cdot 14 = 56 < 59$.